

На правах рукописи

Жабко Андрей Викторович

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ
ПРОЦЕССА ДЕЗИНТЕГРАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ
ОТКОСОВ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИХ
СООРУЖЕНИЙ**

Специальность 25.00.20 – «Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Екатеринбург – 2019

Работа выполнена в ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Научный консультант –	доктор технических наук, профессор Зотеев Олег Вадимович.
Официальные оппоненты:	чл.-корр. РАН, доктор технических наук, профессор Барях Александр Абрамович; доктор технических наук, профессор Макаров Александр Борисович; доктор технических наук, профессор Кутепов Юрий Иванович.
Ведущая организация –	ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (ПНИПУ).

Защита состоится « » июня 2019 г. в 10-00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.010.02 при Институте горного дела УрО РАН по адресу: 620075, г. Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 58.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института горного дела Уральского отделения Российской академии наук:
<http://diss.igduran.ru>

Автореферат диссертации разослан « » апреля 2019 г.

Просьба направлять отзывы почтой в двух экземплярах, заверенных печатью организации, по указанному выше адресу и на электронный адрес: panzhin@igduran.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат технических наук

Панжин А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Оценка несущей способности и устойчивости конструкций всех типов представляет собой серьезную проблему не только в горных науках, но и во многих других сферах деятельности человека.

Теоретическое значение прочности, получаемое из физических (естественно-научных) предпосылок на молекулярно-ионном уровне, в 500 – 1000 раз выше прочности реальных твердых тел. Невозможность использования простой экстраполяции для перехода от атомного строения материалов к практическому определению их свойств и прочности явилось, пожалуй, крупнейшим разочарованием в физической науке о поведении материалов. Это способствовало развитию технического (феноменологического, континуального или сплошнородного) подхода к обоснованию прочности твердых тел и горных пород.

Существенным является тот факт, что подавляющее большинство исследований, вопросов пластического деформирования и разрушения твердых тел проведены для условий разрывного разрушения. Работы по установлению законов дезинтеграции материалов, обладающих внутренним трением (горные породы), в условиях объемного сжатия, то есть при разрушении за счет сдвига, встречаются значительно реже.

Фактически можно утверждать, что на сегодняшний день для сдвигового характера деформирования горных пород и сложного (объемного) напряженного состояния отсутствуют теоретически обоснованные и подтвержденные экспериментом критерии пластичности и прочности, функция пластического потенциала и зависимости, определяющие коэффициент дилатансии. В этой связи в качестве поверхности текучести и функции пластического потенциала используется предельная кулоновская поверхность. Поэтому коэффициент дилатансии, рассчитанный согласно ассоциированному закону пластического течения, в несколько раз превышает экспериментальные значения, а область упругости ассоциирована с предельной. Это, в свою очередь, приводит к значительному завышению дилатантных изменений при пластическом деформировании и искажению результатов моделирования напряженно-деформированного состояния.

Одной из главных задач геомеханики является прогнозирование развития опасных геомеханических процессов. Такие важнейшие задачи, как оценка устойчивости откосов бортов карьеров, отвалов, дамб хвостохранилищ, прогноз параметров процесса сдвижения горных пород, расчет опорных целиков, не получили своего окончательного решения в силу ряда причин, в том числе сугубо теоретических. Так, в силу статической неопределимости задачи, фактически не существует критерия устойчивости откосов, отвечающего условиям необходимости и достаточности равновесия, хотя данный вопрос развивается уже порядка 120 лет силами ученых из различных технических областей знаний. По этой же причине нет возможности теоретически установить критические поверхности разрушения в массиве. Углы сдвижения и разрывов в расчетах принимаются инвариантными относительно глубины, что приближенно установлено из натуральных наблюдений, но не имеет теоретического обоснования. Нет надежных

методов установления (на стадии проектирования) границы зон сдвижения горных пород с разрывом сплошности и плавного деформирования как квазисплошной среды.

Перечисленные выше вопросы могут быть рассмотрены с единых концептуальных позиций в рамках механики континуальной среды.

На основании вышеизложенного можно утверждать, что исследование закономерностей процесса дезинтеграции горных пород, разрушения откосов горнотехнических сооружений и конструктивных элементов систем подземной разработки является актуальной задачей не только в области освоения месторождений, но и в целом в геомеханике и механике разрушения горных пород и твердых тел.

Объектом исследований являются горные породы как сплошная среда, обладающая сцеплением и внутренним трением, горные массивы.

Предметом исследований выступают условия устойчивости или разрушения откосов, предельные параметры конструктивных элементов открытой и подземной разработок, дезинтеграция, пластичность и прочность горных пород.

подавляющее большинство исследований, посвященных устойчивости горнотехнических сооружений, рассматривают откос как сплошную среду, обладающую внутренним трением и сцеплением. В случае рыхлых пород это оправдано без дополнительных замечаний, по крайней мере, с практической точки зрения. Процессы, происходящие при разрушении откосов с блочным строением, подобны процессам, происходящим в очаге землетрясений. Описание процесса разрушения блочных сред с трещинами отдельности, имеющими сложную геометрию (фрактал) и чрезвычайно сложный характер деформирования, на сегодняшний день несколько затруднено, хотя серьезные научные проработки по данному вопросу уже имеются. Поэтому для скальных трещиноватых массивов (откосов) горных пород (блочные среды) применяется тот же подход, что и для рыхлых отложений (представление сплошной средой), а пробелы в понимании процессов, происходящих при пластическом деформировании и разрушении блочных сред, вкладывают в собирательную и абстрактную величину – сцепление трещиноватого горного массива. То есть считается, что при такой постановке задачи найдется некая эквивалентная величина сцепления, которая будет характеризовать сдвиговое свойство блочного массива. Поверхности ослабления массива представляются плоской линией с известными параметрами паспорта прочности (без учета сложного механизма разрушения трещины).

В этой связи **целью диссертации** является создание теории устойчивости откосов горнотехнических сооружений как сплошной среды с внутренним трением и сцеплением, на основе критерия прочности Кулона по методу предельного равновесия, в строгой механико-математической постановке задачи, а также применение полученных теоретических положений для решения задач устойчивости откосов в сложных горно-геологических условиях, сдвижения горных пород, геомеханики подземных разработок, пластичности и прочности горных пород как твердых тел.

Идея работы состоит в использовании вариационных принципов для преодоления статической неопределимости задачи об устойчивости откоса, создании на основе этой теории устойчивости горнотехнических сооружений и выявлении закономерностей пластического деформирования и разрушения горных пород при сдвиге.

Задачи диссертационной работы:

1. Разработать классификацию существующих методов расчета устойчивости откосов по принципу используемых ими допущений (по принципу послабления расчетной схемы).

2. Определить условие устойчивости (критерий устойчивости) откосов в однородных и изотропных средах, обосновать положение и форму критической поверхности скольжения, методику ее построения, а также определить предельные геометрические параметры плоских однородных откосов.

3. Исследовать влияние неоднородности и анизотропии горных массивов на положение и форму критической поверхности скольжения (разрушения) и предельные геометрические параметры откосов.

4. Изучить степень влияния подработки откоса подземными горными работами (карст) и разработать методику расчета подработанных откосов.

5. Разработать методику расчета устойчивости откосов отвалов различных пород (связные, несвязные) на произвольном (устойчивом, неустойчивом) основании.

6. Разработать методику учета обводненности и сейсмичности при оценке устойчивости откосов горнотехнических сооружений.

7. Исследовать влияние тектонических полей напряжений на устойчивость карьерных откосов и разработать методику их учета.

8. Обосновать методику прогнозирования угловых параметров процесса сдвижения горных пород (углы разрывов, сдвижения, граничные), в том числе в условиях тектонических полей напряжений для случая сплошной квазиоднородной среды.

9. На основе предлагаемой теории разрушения откосов разработать метод расчета нагрузок на опорные целики.

10. Разработать рекомендации по обоснованию расчетных прочностных характеристик трещиноватых горных массивов.

11. На основе фундаментальных решений по устойчивости откосов как сплошной среды теоретически обосновать критерий (паспорт) сдвиговой пластичности и прочности горных пород как твердых тел в сложном напряженном состоянии.

12. Математически описать процесс развития пластических деформаций (функцию пластического потенциала) при упрочнении горных пород для сдвиговой деформации, обосновать значения коэффициента дилатансии.

13. Сопоставить теоретические результаты по пластичности и прочности горных пород с экспериментальными исследованиями и скорректировать аналитические положения согласно опытным данным.

14. Получить обобщенный энергетический принцип разрушения (предразрушения, дезинтеграции) горных пород.

15. Обосновать критерий зарождения сдвиговых трещин в твердых телах под воздействием потенциальной энергии деформации.

Защищаемые научные положения:

1. На защиту выносятся теоретический критерий устойчивости (разрушения) откосов горнотехнических сооружений по методу предельного равновесия, отвечающий условиям необходимости и достаточности статического равновесия твердого тела, на основе которого обоснована геометрия (форма и положение в массиве) наиболее опасных поверхностей скольжения в однородных, неоднородных, анизотропных откосах и осуществлен учет тектонических, сейсмических и гидростатических сил.

2. В рамках модели сплошной среды, обладающей внутренним трением φ и сцеплением C , единый критерий пластичности и прочности горных пород (твердых тел) при сдвиге имеет вид:

– в компонентах главных напряжений σ_1, σ_3 :

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi \sigma_1}{C}\right) \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi k \sigma_3}{C}\right)};$$

– в компонентах напряжений на площадке среза τ, σ_n :

$$\tau = C(1 + \sin\varphi) + \frac{1+k}{1-k} C \sin\varphi \ln \left| \frac{(1-k)\sigma_n + 2kC \cos\varphi}{(1+k)C \cos\varphi} \right|,$$

определяющий при

$k = 0$ – функцию пластического потенциала и начальную поверхность текучести (предел упругости) для горных пород с пластическим характером разрушения;

$0 \leq k \leq 1$ – предел прочности горных пород и предел упругости для горных пород с хрупким характером разрушения ($k \approx 1 - \sin\varphi$);

$k \rightarrow 1$ – теоретическую предельную поверхность или предел прочности при сдвиге (срезе), совпадающую с критерием Кулона (Coulomb, 1773).

3. На защиту выносятся вариационный принцип дезинтеграции горных пород, определяющий функцию поверхности (траекторию) разрушения. Форма поверхностей сдвиговой дезинтеграции в твердых телах (горных породах) определяется максимальной работой внешних $\sum V$ и объемных $\sum (W - U)$ сил на относительном перемещении частей тела при срезе, при этом минимизируется энергия, затрачиваемая на создание данных поверхностей $\sum 2\eta$:

$$\frac{\int_N V(x, y, y') dn + \int_S [W(x, y, y') - U(x, y, y')] dS}{\int_L 2\eta(x, y, y') dl} \rightarrow \max .$$

4. При отсутствии притока энергии извне, сдвиговая дезинтеграция в замкнутой плоской системе может происходить только за счет накопившейся в теле энергии, при этом разрушение или появление трещины на любом масштабном

(иерархическом) уровне наступает тогда, когда отношение среднего расстояния между образующимися трещинами к их среднему размеру достигает значения:

$$\lambda = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 2,8_{\varphi=0} \div 3,7_{\varphi=\pi/4}.$$

Методы исследований. При решении поставленных задач в работе широко использованы методы дифференциального, интегрального, вариационного исчисления и математической статистики, принципы, законы и теоремы теоретической механики и механики сплошной среды, метод сопоставления теоретических и экспериментальных данных.

Личный вклад автора диссертации заключается в сборе и обобщении материалов, постановке задач исследований, выполнении исследований, формулировании научных положений, выводов и рекомендаций диссертации.

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций подтверждается удовлетворительной сходимостью полученных теоретических результатов и экспериментальных данных.

Сопоставление предельных параметров плоских однородных откосов, по данным диссертационного исследования, с известными наиболее распространенными аналогами (Правила, СНиП и др.) показывает их близость с закономерным и ожидаемым отклонением, объясняемым новизной решения задачи.

Аналитически доказанная стабильность углов разрыва (граничных, сдвига) с глубиной для квазиоднородных массивов находит свое повсеместное подтверждение при инструментальных исследованиях процесса сдвига горных пород. Обоснованные значения коэффициента снижения нагрузки на целики достаточно близки к экспериментальным значениям, по данным ВНИМИ.

Полученные аналитически функции поверхностей текучести, пластического потенциала и предельной поверхности, а также значения коэффициентов дилатансии сопоставлены с весьма представительной выборкой экспериментальных данных, произведена корректировка теоретических результатов.

Предлагаемый вариационный принцип дезинтеграции горных пород позволяет наглядно объяснить некоторые особенности геомеханических явлений: зональную дезинтеграцию горных пород вокруг подземных выработок, округлость поверхности скольжения при разрушении откосов и др. Достоверность предлагаемого критерия зарождения сдвиговых трещин подтверждается совпадением с результатами исследований академика М. А. Садовского (геофизика), академика С. Н. Журкова, проф. В. С. Куксенко (физика твердого тела), академика М. В. Курлени и чл.-корр. В. Н. Опарина (геомеханика).

Новизна результатов исследований состоит:

– в разработке теории устойчивости (разрушения) откосов горнотехнических сооружений как сплошной среды по методу предельного равновесия, обеспечивающей необходимость и достаточность условия равновесия призмы смещения по наиболее слабой поверхности скольжения;

– аналитическом обосновании степени влияния тектонических полей напряжений на устойчивость бортов карьеров;

– аналитическом доказательстве стабильности углов разрыва, а значит, углов сдвижения и граничных углов с увеличением глубины разработки как для сплошной квазиоднородной среды;

– доказательстве слабой зависимости углов разрыва (сдвижения) в сплошной квазиоднородной среде от углов внутреннего трения, вследствие стягивания поверхностей скольжения с различными углами внутреннего трения в единую поверхность;

– обосновании на континуальном уровне разворота структурных элементов при упрочнении, что подтверждается экспериментальными данными на мезоуровне и в геодинамике;

– теоретическом обосновании (аналитический вывод) и экспериментальном подтверждении условия (критерия) пластичности и прочности, функции пластического потенциала и коэффициента дилатансии, то есть в обосновании закономерностей пластического деформирования горных пород при сдвиге;

– выводе энергетического вариационного принципа дезинтеграции твердых тел, позволяющего определять геометрию поверхностей разрушения в телах (горных массивах);

– получении критерия зарождения сдвиговых трещин в твердых телах (горных породах) под воздействием потенциальной энергии деформации и его физической интерпретации.

Научная значимость результатов исследований состоит:

– в разработке теории устойчивости или разрушения откосов горнотехнических сооружений как сплошной среды по методу предельного равновесия;

– получении фундаментальных уравнений, определяющих условия предельного равновесия призм смещения и геометрии (траектории) поверхностей скольжения;

– аналитическом получении функций поверхностей текучести, а также поверхностей, определяющих предел упругости и предел прочности горных пород;

– аналитическом обосновании функции пластического потенциала при пластическом деформировании горных пород (искусственных материалов);

– объяснении некоторых физических аспектов процесса пластического деформирования (упрочнения) горных пород при сдвиге, в частности:

1) главным признаком пластической деформации на стадии упрочнения является частичная или полная (на пределе упругости) потеря удерживающего эффекта от внутреннего трения на площадках микросдвигов под действием минимального главного напряжения и его постепенное усиление в процессе упрочнения, что является следствием явления дилатансии, то есть увеличения объема в направлении минимального главного напряжения;

2) доказывається изменение углов наклона критических площадок микросдвигов в процессе упрочнения, что трактуется как разворот структурных элементов при пластическом деформировании;

– выводе и обосновании вариационного принципа или энергетического условия разрушения твердых тел (горных массивов), позволяющего определять траекторию разделения тел в процессе дезинтеграции;

– физической интерпретации критерия зарождения сдвиговых трещин в твердых телах (горных породах) под действием потенциальной энергии деформации.

Практическое значение работы. Отличительной особенностью проведенных исследований является то, что все фундаментальные теоретические положения доведены до расчетных формул или алгоритмов для компьютерного решения, графиков, номограмм, то есть до возможности практического применения. Более того, автором лично проделаны поверочные расчеты, подтверждающие их работоспособность. Даже в случае сугубо научных результатов в работе указываются возможные направления их дальнейшего использования на практике.

Результаты выполненных исследований позволяют производить оценку устойчивости откосов горнотехнических сооружений в горно-геологических условиях практически любой сложности. Разработаны методы прогнозирования угловых параметров процесса сдвижения горных пород (граничные углы, углы сдвижения и разрывов) и нагрузок на опорные целики при подземной разработке месторождений для сплошной квазиоднородной среды. Разумеется, являясь фундаментальной основой геомеханических расчетов, во многом для практики будет полезен аналитический критерий пластического деформирования твердых тел и, в частности, горных пород (паспорта пластичности и прочности). Выявленные закономерности пластического деформирования позволят осуществлять прогноз опасных геомеханических и геодинамических явлений. Знание закономерностей пластического деформирования твердых тел позволит скорректировать существующие модели сплошной среды – теории пластичности.

Реализация работы. Результаты работы реализуются в учебном процессе, изданы три учебных и учебно-методических пособия, которые используются при проведении курсов переподготовки, повышения квалификации работников горных предприятий таких компаний, как ПАО «ГМК «Норильский никель», ПАО «НК «Роснефть», ПАО «Уралкалий», АО «Русская медная компания», предприятий Уральской горно-металлургической компании: ОАО «УК «Кузбассразрезуголь», ПАО «Гайский ГОК», АО «Учалинский ГОК» и др. Результаты работы были использованы и внедрены для оценки и обеспечения устойчивости бортов карьера Комаровского месторождения (Казахстан) и карьера ГОКа «Эрдэнэт» (Монголия). Основные теоретические и практические результаты исследований переданы для использования в лабораторию устойчивости бортов карьеров и сдвижения горных пород ОАО «Уралмеханобр-УГМК».

Апробация работы. Основные положения и результаты работы опубликованы в 46 научных статьях (из них 20 в изданиях из перечня ВАК), двух научных монографиях, докладывались на Уральской горнопромышленной декаде (УГГУ, г. Екатеринбург) в 2004 – 2008, 2010, 2013, 2015 и 2016 гг.; на Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Проблемы недропользования» (ИГД УрО РАН, г. Екатеринбург) в 2009, 2011, 2012, 2014, 2015 и 2017 гг.; на международной конференции «Состояние и перспективы развития маркшейдерского дела» (УГГУ, г. Екатеринбург) в 2010 г.; на международной конференции: «XV International ISM Congress», 2013. 16 – 20 September 2013,

Aachen, Germany; на Всероссийской научно-технической конференции с международным участием «Геомеханика в горном деле» (ИГД УрО РАН, г. Екатеринбург) в 2014 г.; на международной конференции: «Mezinárodní konference Geodézie a Důlní měřičtví 2015 XXII. konference Společnosti důlních měřičů a geologů. Zasedání odborných komisí ISM». Praha 24 – 26 června 2015.; на V международной конференции «Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений», г. Екатеринбург, УГГУ, 5 – 7 октября 2016 г.; на Всероссийской конференции с участием иностранных ученых «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли» (стендовый доклад), г. Новосибирск, ИГД СО РАН, 2 – 6 октября, 2017 г.

Объем и структура работы. Диссертация включает введение, пять глав, заключение, библиографический список из 336 наименований и два приложения. Объем диссертации – 331 страница машинописного текста, в том числе 11 таблиц, 95 рисунков.

В диссертации рассмотрен достаточно широкий круг вопросов геомеханики, причем некоторые из них, например прочность и пластичность горных пород, являются междисциплинарными. Существенный вклад в развитие рассматриваемых в диссертации вопросов внесли многие ученые из различных научно-исследовательских и академических институтов, вузов и т. д. Поэтому ограничимся здесь перечислением организаций, внесших, по мнению автора, наибольший вклад в развитие рассматриваемых вопросов, результаты исследований которых были широко использованы при написании диссертации: ИПКОН РАН им. академика Н. В. Мельникова, ИГД им. А. А. Скочинского, ИФЗ им. О. Ю. Шмидта, ИДГ РАН, ВНИМИ, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН, ГИ КНЦ РАН, ВИОГЕМ, ГИ УрО РАН, ИГД УрО РАН, УНИПРОМЕДЬ, ИГД СО РАН, ИФПМ СО РАН, ВостНИГРИ, ИГД Севера им. Н. В. Черского СО РАН, ИВиС ДВО РАН, ИГД ДВО РАН, ИТиГ ДВО РАН, ДонНТУ, МГГУ (МИСиС), РГГРУ им. Серго Орджоникидзе, СПбГУ, ТулГУ, ПНИПУ, МГТУ им. Г. И. Носова, УГГУ, КузГТУ им. Т. Ф. Горбачева, СибГИУ, СФУ, ИрНИТУ, ДВФУ и др.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность за ценные замечания, которые позволили улучшить содержание диссертации, следующим наставникам и коллегам: научному консультанту д.т.н. Зотееву О. В., д.т.н. Латышеву О. Г., д.т.н. Корнилкову М. В., д.т.н. Лелю Ю. И., д.т.н. Валиеву Н. Г., д.т.н. Багазееву В. К., д.т.н. Кашникову Ю. А., д.т.н. Сашурину А. Д., к.т.н. Панжину А. А.

СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ, СХЕМА И МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

На начальном этапе исследований получено фундаментальное (строгое) решение задачи по устойчивости однородного и изотропного откоса как континуума, обладающего внутренним трением и сцеплением по методу предельного равновесия (определение траектории поверхности разрушения и критерия устойчивости). На основе данного решения получены:

1. Теория устойчивости откосов для условий практически любой сложности: однородный откос, неоднородный откос, анизотропный откос, обводненный откос, откос на слабом наклонном контакте, откос на слабом наклонном основании, подработанный откос, нагруженный откос, откос несвязных пород на различных основаниях, откосы в поле тектонических и сейсмических напряжений. Методики прогноза угловых параметров процесса сдвижения горных пород и нагрузок на опорные целики в сплошном квазиоднородном массиве.

2. Критерии пластичности и прочности горных пород как твердых тел на основе решения задачи об устойчивости вертикального откоса – разрушение в поле главных напряжений.

3. Вариационный принцип дезинтеграции горных пород (твердых тел).

4. Критерий зарождения сдвиговых трещин в твердых телах (горных породах) под действием потенциальной энергии деформации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ПЕРВОЕ НАУЧНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Традиционно исследования в области оценки устойчивости откосов идут по двум направлениям. Сразу же оговоримся, что указанные направления представляют собой две абсолютно различные задачи, описывают два различных вида потери устойчивости откосов (обрушения и оползни), а их сравнение не корректно. Первое направление (метод предельных напряженных состояний) отыскивает такую форму откоса и функцию распределения нагрузки на его площадке, при которых в каждой точке области, потерявшей устойчивость (призмы смещения), выполняется условие предельного напряженного состояния. Другими словами, данное направление отыскивает условия обрушения откосов. Однако на практике мы имеем откос, как правило, произвольной формы, нагруженный произвольной нагрузкой, а еще чаще вообще без нагрузки, его разрушение представляет собой смещение оползневых масс по ярко выраженной поверхности скольжения. В этом случае условие предельного напряженного состояния во всех точках области выполняться не будет, а соответственно, неприменима данная теория. С. С. Голушкевич отмечает: “Случай, когда сыпучая среда находится в предельном напряженном состоянии во всех точках, следует рассматривать как иногда возможный, частный и притом крайний случай состояния предельного равновесия. Поэтому состояние предельного равновесия массива сыпучей среды лучше определять как состояние, при котором его внутренняя граница является поверхностью скольжения”. Таким образом, второе направление (метод предельного равновесия) исследует условия равновесия (устойчивости) откосов вдоль одиночной поверхности скольжения, в общем случае ее форма и положение в массиве неизвестны. В этой связи основными задачами являются: 1) определение траектории (геометрии) поверхности скольжения (разрушения) в массиве; 2) получение критерия устойчивости (условия равновесия) вдоль данной поверхности. Первые работы в данном направ-

лении датируются началом XX века. Исследованиями данного вопроса занимались железнодорожники, автодорожники, строители, гидротехники, горняки и др. К настоящему времени, по некоторым оценкам, разработано около 100 способов оценки устойчивости откосов, ни один из которых не является строгим (фундаментальным). Главной причиной отсутствия строгого решения является статическая неопределимость задачи. И, действительно, рассматривая равновесие призмы смещения по произвольной (в общем случае нелинейной) поверхности скольжения, встает проблема установления закона распределения нормальных к данной поверхности напряжений. Для этого прибегают к разбиению призмы смещения на отсеки (блоки), но в этом случае, при рассмотрении их равновесия, неизвестных реакций связей оказывается больше, чем условий для их определения (условий равновесия). Кроме того, в качестве поверхностей скольжения используются недостаточно обоснованные кривые (функции), положение которых в массиве определяется, как правило, подбором.

Фундаментальному решению указанных задач и разработке методов расчета устойчивости откосов в произвольных горно-геологических условиях посвящены исследования по первому научному положению. Строгость при решении данной задачи удалось достичь, преодолевая посредством принципа К. Ф. Гаусса статическую неопределимость, а также используя вариационное исчисление для обоснования геометрии наиболее слабой поверхности скольжения в откосе.

Общая теория устойчивости однородных откосов

Как известно, для равновесия плоской системы сил необходимо выполнение трех условий геометрической статики. С другой стороны, задачи статики весьма эффективно решаются при использовании общих принципов механики. Так, для равновесия механической системы с одной степенью свободы, согласно принципу возможных перемещений (Ж. Лагранж, 1788), необходимо и достаточно выполнение равенства:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0, \quad (1)$$

где $\sum \delta A_k^a$, $\sum \delta A_k^r$ – сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил и реакций связей, соответственно, при любом возможном перемещении системы.

Введем систему координат (направление оси x – вправо, y – вверх) и рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы – призму смещения, состоящую из n материальных точек – центры масс элементарных отсеков (отсеки условно разделены вертикальными гранями). Выделим из призмы смещения произвольный отсек и рассмотрим его равновесие под действием приложенных активных сил и реакций связей (рис. 1, *a*).

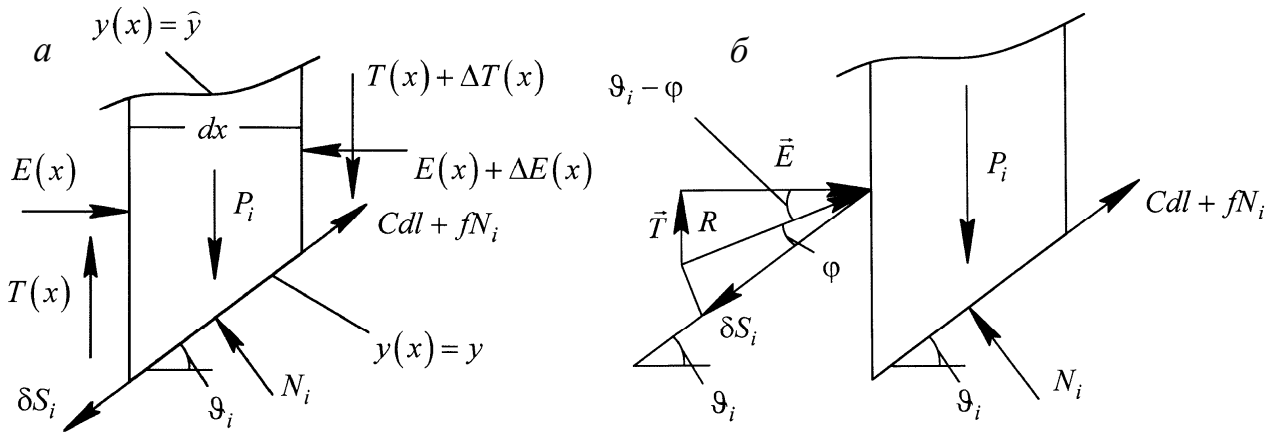


Рис. 1. Отсек призмы смещения:
действующие на него силы (а); направление межблоковой реакции (б)

Условие равновесия для данного отсека, с учетом принципа (1), представляется равенством:

$$-E(x)\cos\vartheta_i\delta S_i + (E(x) + \Delta E(x))\cos\vartheta_i\delta S_i - T(x)\sin\vartheta_i\delta S_i + (T(x) + \Delta T(x))\sin\vartheta_i\delta S_i + P_i\sin\vartheta_i\delta S_i - R_i\delta S_i = 0, \quad (2)$$

где ϑ_i – угол наклона поверхности скольжения в точке; $E(x)$, $T(x)$ – соответственно функции нормальной и касательной составляющих реакций по боковым граням отсека; Δ – оператор приращения функции; δS_i – возможное (виртуальное) перемещение отсека; P_i – вес отсека; R_i – сила сопротивления по площадке скольжения.

Для отсека с предельными геометрическими параметрами на площадке скольжения выполняется условие предельного равновесия:

$$R_i = fN_i + Cdl = fN_i + C\frac{dx}{\cos\vartheta_i}, \quad (3)$$

где $f = \operatorname{tg}\varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); N_i – нормальная реакция площадки скольжения; C – сцепление массива горных пород; dl , dx – соответственно дифференциалы дуги и аргумента.

Составим условие равновесия по направлению нормали к площадке скольжения:

$$N_i - P_i\cos\vartheta_i - \Delta T(x)\cos\vartheta_i + \Delta E(x)\sin\vartheta_i = 0. \quad (4)$$

Используя выражения (2), (3) и (4), запишем условие равновесия отсека в общем виде:

$$[\Delta E(x)(1 + f\operatorname{tg}\vartheta_i) + \Delta T(x)(\operatorname{tg}\vartheta_i - f) + P_i(\operatorname{tg}\vartheta_i - f) - C(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_i)dx]\cos\vartheta_i\delta S_i = 0. \quad (5)$$

Преобразуем уравнение (5), используя соотношения:

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta E(x) = dE(x) = dE, \Delta T(x) = dT, \Delta E(x) = \frac{\partial E}{\partial x} dx = E' dx, \Delta T(x) = T' dx.$$

$$[E'(1 + f\operatorname{tg}\vartheta_i)dx + T'(\operatorname{tg}\vartheta_i - f)dx + P_i(\operatorname{tg}\vartheta_i - f) - C(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_i)dx]\cos\vartheta_i\delta S_i = 0. \quad (6)$$

Запишем условие равновесия всей системы (призмы смещения), выразив возможное перемещение каждого отсека δS_i через возможное (горизонтальное) перемещение всей призмы δS_Γ :

$$\delta S_i \cos \vartheta_i = \delta S_\Gamma.$$

Кроме того, учтем следующие соотношения:

$$P_i = \gamma(\hat{y} - y)dx, \operatorname{tg} \vartheta_i = y',$$

где γ – объемный вес горных пород; \hat{y}, y – функции линий откоса и поверхности скольжения соответственно; y' – производная функции поверхности скольжения.

Таким образом, имеем условие равновесия призмы смещения в виде (здесь и далее пределы интегрирования опущены):

$$\int [\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) + E'(1 + fy') + T'(y' - f)] dx \delta S_\Gamma = 0. \quad (7)$$

Преобразуем условие равновесия (7) к виду:

$$\int [\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) + (T' + fE')y'] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0, \quad (8)$$

где T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения соответственно слева и справа.

Зададимся вопросом: как должны распределяться между собой приращенная касательной и нормальной составляющих межблоковых реакций (далее просто реакций), чтобы при перемещении отсека они совершали экстремальную работу? Таким образом, имеем задачу линейного программирования:

$$E'(1 + ftg\vartheta_i)dx + T'(tg\vartheta_i - f)dx \rightarrow \operatorname{extr}.$$

Градиент (антиградиент) функции в этом случае имеет координаты $\vec{\operatorname{grad}} = \{1 + ftg\vartheta_i, tg\vartheta_i - f\}$, поэтому экстремальную работу на перемещении реакция будет производить при следующем условии (рис. 1, б):

$$\frac{\partial T}{\partial E} = \frac{T'}{E'} = \frac{tg\vartheta_i - f}{1 + ftg\vartheta_i} = \operatorname{tg}(\vartheta_i - \varphi). \quad (9)$$

Докажем справедливость равенства (9). Доказательство можно дать на основе принципа наименьшего принуждения, открытого К. Ф. Гауссом в 1829 г. Принципу К. Ф. Гаусса, в частности, можно дать энергетическое толкование, которое И. И. Рахманинов назвал началом наименьшей потерянной работы: действительное движение среди кинематически возможных выделяется тем, что для него работа реакций связей на путях отклонения этого движения от свободного движения в каждый данный момент есть минимум. Если мы мысленно уберем реакцию смежного отсека, то есть заменим несвободное движение свободным, то направление движения отсека не изменится. Поэтому угол наклона вектора отклонения несвободного движения от свободного совпадает с углом наклона площадки скольжения. Работа реакции в этом случае определится зависимостью

$$A_R = R[f \sin(\xi - \vartheta_i) - \cos(\xi - \vartheta_i)] \Delta S_i,$$

где R – реакция смежного отсека; ξ – угол наклона реакции к горизонту; ΔS_i – перемещение отсека по площадке сдвига (вектор отклонения).

Учитывая, что величины R и ΔS_i произвольны и постоянны, для выполнения условия экстремума работы приравняем ее производную по ξ нулю. Отсюда

$$\xi = \vartheta_i - \varphi.$$

Решаем совместно уравнения (6) и (9) относительно производных функций межблоковых реакций, подставляя их в уравнение (8), и после преобразований необходимое и достаточное условие равновесия призмы смещения представляется в виде:

$$\int \left[\frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{1 + y'^2} \right] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0. \quad (10)$$

Анализируя уравнение (6), замечаем, что при условии $\vartheta_i \leq \varphi$ работа касательной составляющей межблоковой реакции меняет знак. По теореме Менабреа, согласно которой при добавлении каких-либо связей (межблоковой реакции) потенциальная энергия (работа) уменьшается и никогда не может увеличиваться, это невозможно. Поэтому на данном участке реакция горизонтальна. В этом случае условие равновесия призмы (или ее части) примет вид:

$$\int \left[\frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{1 + fy'} \right] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0. \quad (11)$$

Далее рассматриваем плоские однородные откосы. Из условия того, что межблоковые реакции не могут отрицательно влиять на устойчивость или сплошности призмы смещения, можно показать, что под горизонтальной площадкой уступа (бермой) необходимо принять $E' = T' = 0$. Положим в уравнении (8) $E' = T' = 0$, получим следующее условие равновесия:

$$\int \left[\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) \right] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0. \quad (12)$$

Уравнения (10), (11), (12) позволяют оценить устойчивость призмы смещения по произвольной поверхности скольжения.

Перейдем к рассмотрению решения задачи по нахождению потенциальной поверхности скольжения в плоских однородных откосах. Левые части уравнений (10), (11), (12) представляют собой разность сдвигающих и удерживающих сил на возможном перемещении призмы смещения. Очевидно, что функции, обеспечивающие максимум данным интегральным функционалам, будут описывать наиболее слабую (напряженную) поверхность скольжения. Таким образом, имеем следующую задачу вариационного исчисления:

$$\int_{\vartheta \leq \varphi} \left[\frac{(kx - y_1)(y'_1 - f) - \lambda(1 + y_1'^2)}{1 + fy'_1} \right] dx + \int_{\vartheta > \varphi} \left[\frac{(kx - y_2)(y'_2 - f) - \lambda(1 + y_2'^2)}{1 + y_2'^2} \right] dx + \int_{\text{берма}} \left[(H - y_3)(y'_3 - f) - \frac{C}{\gamma}(1 + y_3'^2) \right] dx \rightarrow \text{extr}, \quad (13)$$

где k – тангенс угла наклона откоса; H – высота откоса; $\lambda = \frac{C}{\gamma n} > 0$ – постоянная, зависящая от формы откоса, физико-механических свойств горных пород, и определяющая предельную высоту откоса; n – постоянная, обеспечивающая выполнение условия предельного равновесия в пределах каждого отсека.

Вариационная задача (13) решается посредством уравнения Л. Эйлера, (1744). Таким образом, дифференциальные уравнения, определяющие наиболее опасную поверхность скольжения, в принятой системе координат имеют вид:

$$kx - y_1 = \lambda \frac{(kf - 1)y_1'^2 + 2(k + f)y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2f^2y_1' + k - f + kf^2}; \quad (14)$$

$$kx - y_2 = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f}; \quad (15)$$

$$(H - y_3) = \frac{C(y_3'^2 - 1)}{\gamma f}. \quad (16)$$

Для плоских однородных откосов наиболее слабая поверхность скольжения состоит из трех участков (рис. 2), описываемых соответственно уравнениями (14), (15) и (16).

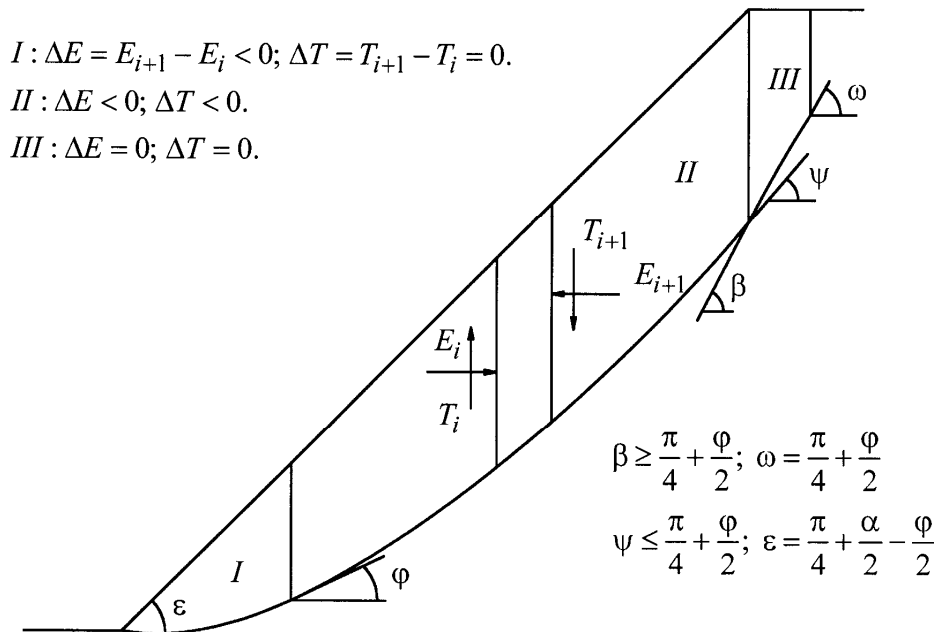


Рис. 2. Схема к построению поверхности скольжения и расчету устойчивости откоса

По результатам численного интегрирования были построены поверхности скольжения для некоторых значений углов откоса и внутреннего трения в предельном равновесии (рис. 3, а, б, в, г, д, е). Вертикальными линиями на рисунках отсечены точки поверхностей скольжения с углом наклона, равным углу внутреннего трения горных пород, а также границы участков откоса и горизонтальной площадки (бермы). В результате численного решения определены пре-

дельные параметры плоских однородных откосов и построена номограмма устойчивости (рис. 4, *a*), а также номограмма для определения ширины призмы обрушения однородных откосов (рис. 4, *б*).

На рис. 5, *a* приведено сравнение полученных графиков устойчивых откосов с графиками, рекомендуемыми действующими Правилами обеспечения устойчивости..., ВНИМИ, 1998. Анализ данных графиков показывает, что рекомендуемый нормативным документом предельный угол устойчивых откосов завышен относительно предлагаемого автором на $2 - 8^\circ$. Меньшие значения соответствуют высоким откосам (бортам карьера) и составляют $1 - 3^\circ$, что является достаточно существенным.

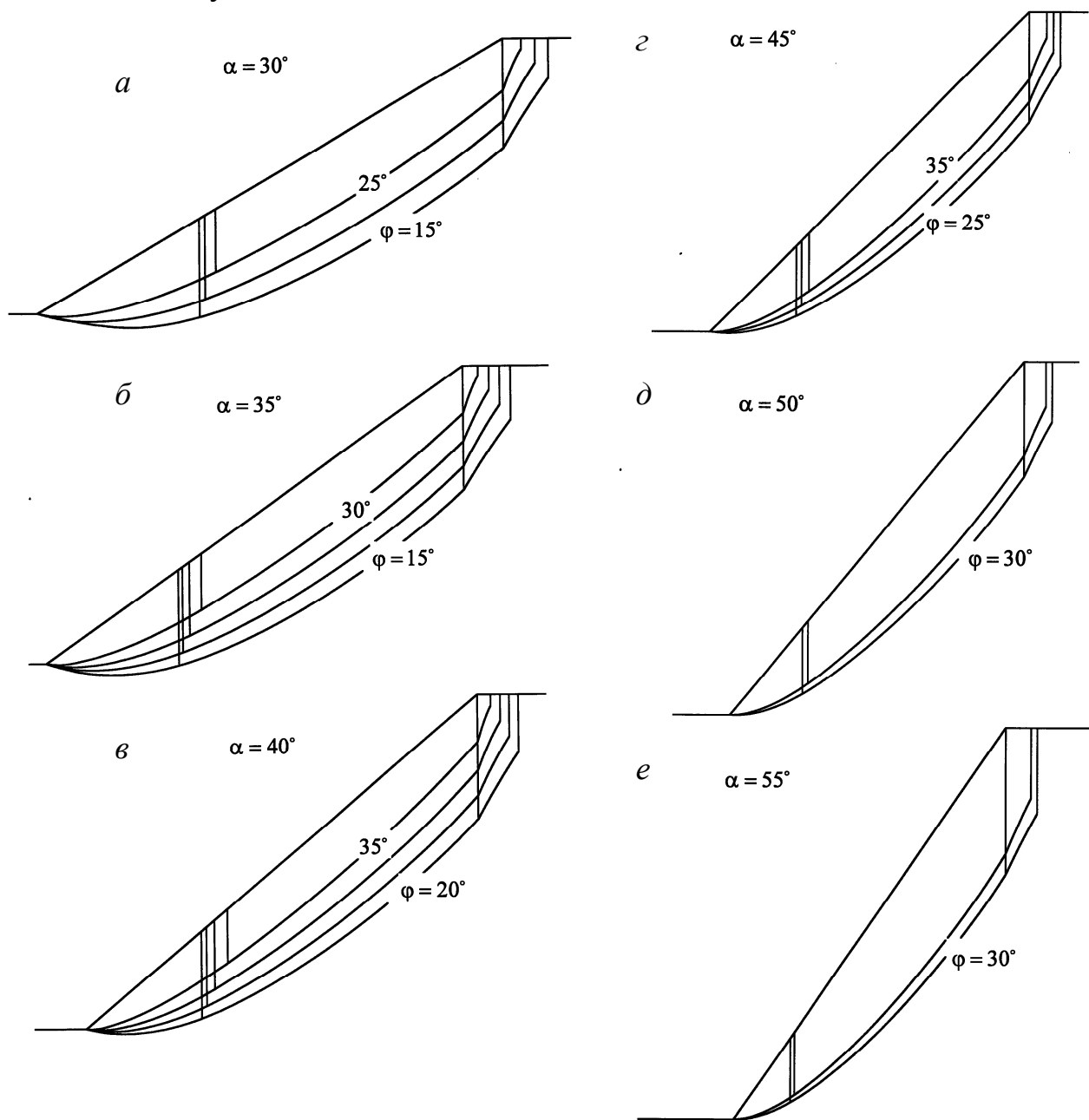


Рис. 3. Поверхности скольжения в плоском однородном откосе:
для $\alpha = 30^\circ$ (*a*); $\alpha = 35^\circ$ (*б*); $\alpha = 40^\circ$ (*в*); $\alpha = 45^\circ$ (*г*); $\alpha = 50^\circ$ (*д*); $\alpha = 55^\circ$ (*e*)

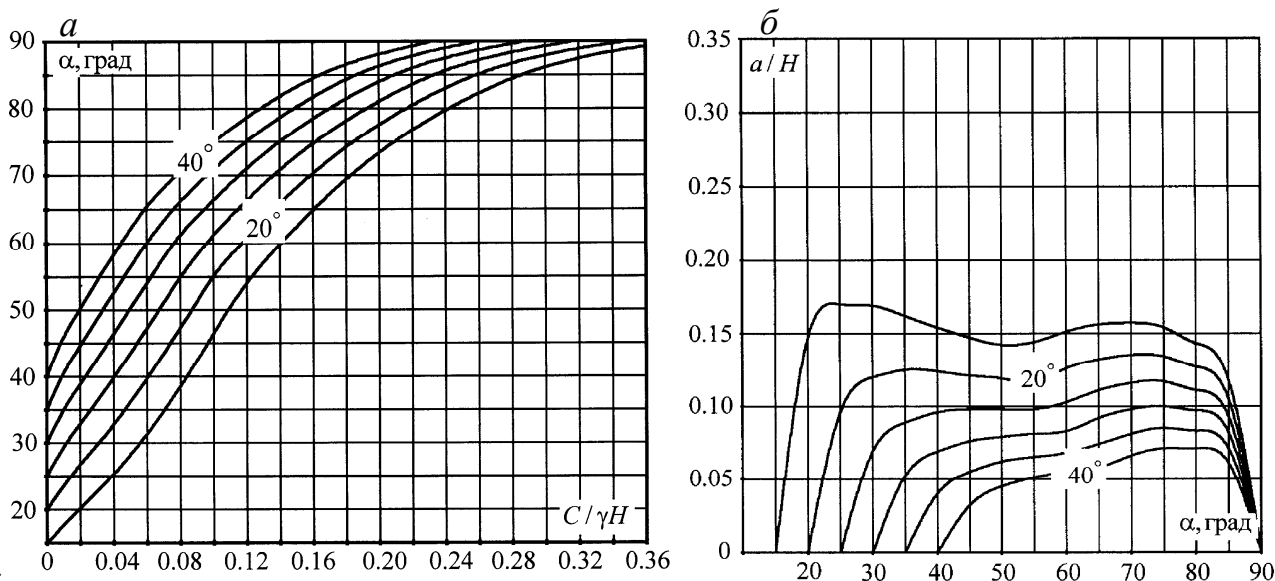


Рис. 4. Номограммы устойчивости (а) и ширины призмы обрушения (б)

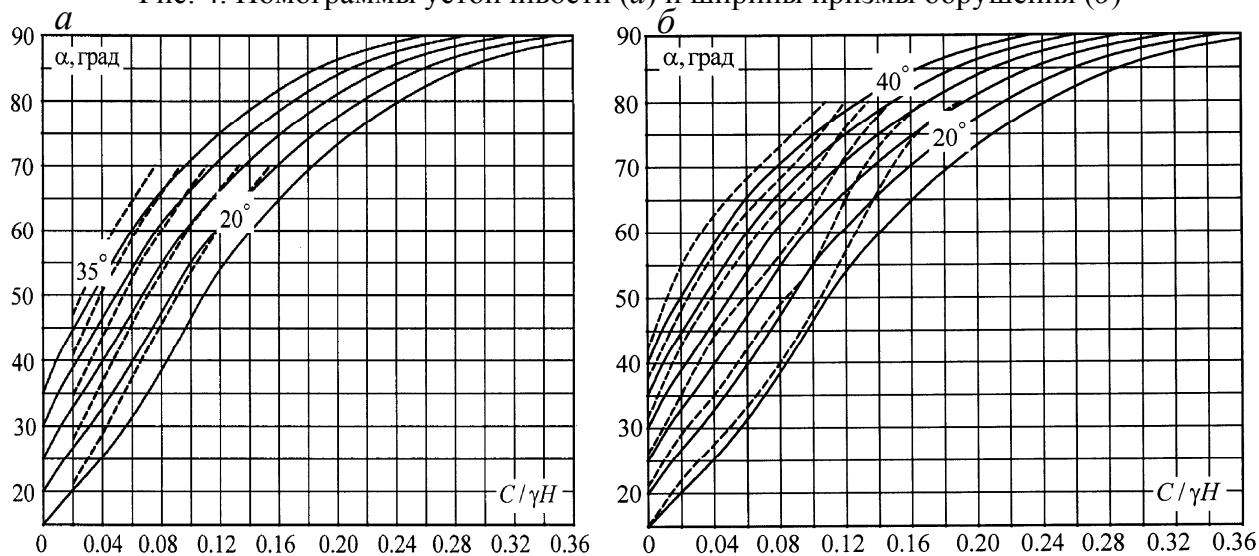


Рис. 5. Сравнение полученных графиков устойчивости (сплошная) с данными ВНИМИ, 1998 (пунктир) (а) и СНиП 45.13330.2012 (пунктир) (б)

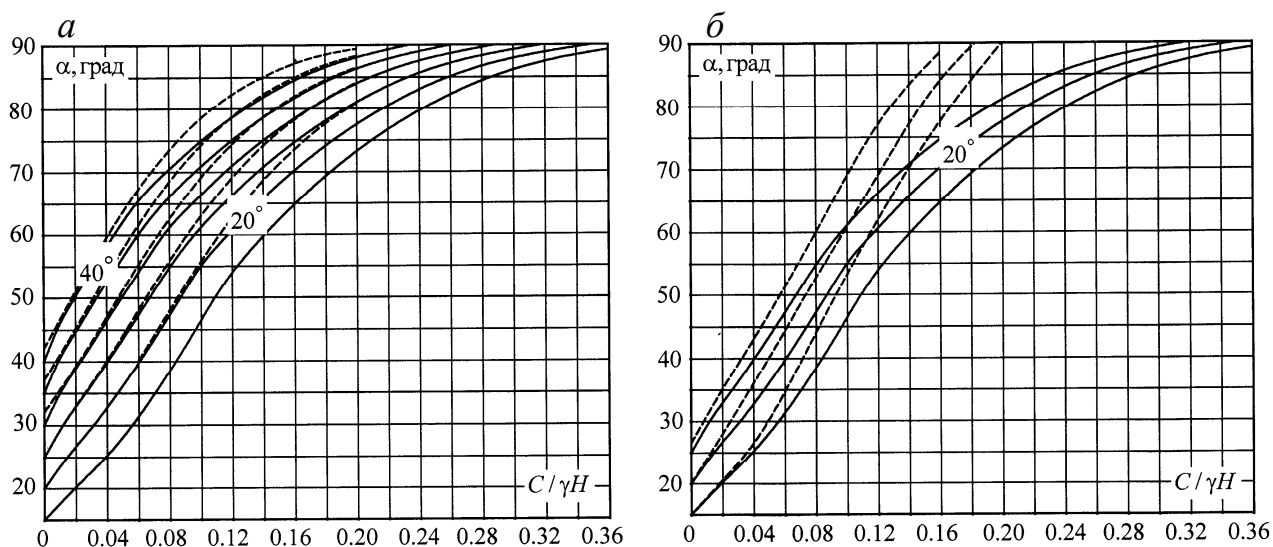


Рис. 6. Сравнение полученных графиков устойчивости (сплошная) с графиками способов Ямбу (Гордеев В. А., пунктир) (а) и Тейлора (пунктир) (б)

Также полученные графики были сравнены с графиками, рекомендуемыми нормативом в области строительства – СНиП 45.13330.2012 (рис. 5, б). В данном случае также отмечаем, что для высоких откосов рекомендации СНиП прогнозируют завышенные значения углов откосов на $1 - 5^\circ$, в зависимости от угла внутреннего трения. Для невысоких откосов разница становится весьма существенной. Завышения углов устойчивых откосов прогнозируют и расчеты способами Янбу и Тейлора (рис. 6, а, б), однако для высоких откосов разница с автором уже менее значительна, а для небольших по высоте откосов разница углов откоса также возрастает.

Прогнозирование завышенных значений углов откосов всеми рассмотренными способами и нормативными документами относительно предлагаемых объясняется недостаточной обоснованностью формы и положения, используемых в расчетах потенциальных поверхностей скольжения. Кроме того, значительные различия углов откоса (см. рис. 5, а) объясняются использованием расчетных схем с переоцененным вкладом в устойчивость касательной межблоковой реакции.

Необходимо отметить, что только предлагаемая теория прогнозирует для сыпучих пород ($C = 0$) плоскую поверхность скольжения, совпадающую с откосом, и его устойчивый угол, равный углу внутреннего трения (углу естественного откоса). Все известные способы, схемы расчета и т. д. не удовлетворяют данному теоретическому условию по уже упомянутой причине – недостаточная обоснованность геометрии поверхности скольжения.

Расчет откосов в сложных горно-геологических условиях

В практике горного дела однородные и изотропные откосы встречаются достаточно редко, однако исключительно важно было разработать теорию именно для такой идеализированной среды. Подземные горные работы, карст, геологическое строение массива, условия отсыпки отвалов и пр. создают анизотропию и неоднородность разрушаемого массива. В этом случае поверхность скольжения при переходе из одного литологического слоя в другой или на поверхности ослабления (контакты слоев, трещины большого протяжения, тектонические нарушения и т. д.) преломляется. Таким образом, задача по расчету неоднородных и анизотропных откосов усложняется относительно однородных откосов определением углов излома и координатами точек излома. С другой стороны, данная задача может быть решена в рамках вариационного исчисления, она называется разрывной вариационной задачей. Для анизотропного откоса данная задача имеет вид:

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{(\hat{y} - y)(y' - f) - \lambda(1 + y'^2)}{1 + y'^2} dx + \int_{x_0}^{x_2} \left[(\hat{y} - \text{tg}\beta x - g)(\text{tg}\beta - f') - \frac{C}{\gamma}(1 + \text{tg}^2\beta) \right] dx \rightarrow \text{extr.} \quad (17)$$

Тогда условие в точке излома поверхности скольжения:

$$\frac{\text{tg}\psi - \text{tg}\varphi}{1 + \text{tg}^2\psi} - (\text{tg}\beta - \text{tg}\varphi') + (\text{tg}\beta - \text{tg}\psi) \frac{1 + 2\text{tg}\varphi\text{tg}\psi - \text{tg}^2\psi}{(1 + \text{tg}^2\psi)^2} = \frac{\lambda - \frac{C'}{\gamma}(1 + \text{tg}^2\beta)}{h}, \quad (18)$$

где ψ – угол наклона поверхности скольжения к горизонту в точке преломления; β – угол наклона поверхности ослабления к горизонту; h – глубина точки излома (расстояние по вертикали от поверхности откоса или бермы до точки излома); $C', \varphi', f' = \text{tg}\varphi'$ – механические характеристики поверхности ослабления.

Рассмотрим теперь задачу о преломлении поверхности скольжения вследствие ее перехода в литологический слой с иными механическими характеристиками. Аналогом поставленной задачи является задача о преломлении луча света на границе сред с разными плотностями в постановке принципа Ферма, 1660 г. Примем $\psi > \varphi$ (не является принципиальным условием и принимается только для конкретики) – угол наклона поверхности скольжения к горизонту до преломления; β – угол наклона контакта литологических слоев к горизонту; $\omega > \varphi'$ – угол наклона поверхности скольжения к горизонту после преломления (слой с параметром $\lambda' = C'/\gamma n = (C'/C)\lambda$); C', φ' – механические характеристики литологического слоя, в который переходит поверхность скольжения. Составляя выражения, подобные (17) и (18), получим условие в точке излома поверхности скольжения для неоднородного откоса:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{tg}\psi - \text{tg}\varphi}{1 + \text{tg}^2\psi} - \frac{\text{tg}\omega - \text{tg}\varphi'}{1 + \text{tg}^2\omega} + (\text{tg}\beta - \text{tg}\psi) \frac{1 + 2\text{tg}\varphi\text{tg}\psi - \text{tg}^2\psi}{(1 + \text{tg}^2\psi)^2} - \\ & - (\text{tg}\beta - \text{tg}\omega) \frac{1 + 2\text{tg}\varphi'\text{tg}\omega - \text{tg}^2\omega}{(1 + \text{tg}^2\omega)^2} = \frac{\lambda - \lambda'}{h}. \end{aligned} \quad (19)$$

На рис. 7 приведены примеры строгого аналитического расчета откосов бортов карьеров и отвалов в различных горно-геологических условиях.

Решение систем уравнений для определения численных значений неизвестных параметров, а также определение координат точек поверхностей скольжения (см. рис. 7) производилось в математическом комплексе *Mathcad*.

Оценку устойчивости откосов в условиях обводненности, сейсмичности и тектонических полей напряжений рекомендуется производить по формуле:

$$\begin{aligned} & \sum_{\vartheta \leq \varphi} \left[\frac{\gamma h (\text{tg}\vartheta - \text{tg}\varphi + k_c / (\cos\vartheta \cos\varphi)) + k_k \sigma_T \text{tg}\vartheta (1 + \text{tg}\varphi \text{tg}\vartheta) - (C - \gamma_B h \text{tg}\varphi) (1 + \text{tg}^2\vartheta)}{1 + \text{tg}\varphi \text{tg}\vartheta} \right] \Delta + \\ & + \sum_{\vartheta > \varphi} \left[\frac{\gamma h (\text{tg}\vartheta - \text{tg}\varphi + k_c / (\cos\vartheta \cos\varphi)) + k_k \sigma_T \text{tg}\vartheta (1 + \text{tg}\varphi \text{tg}\vartheta) - (C - \gamma_B h \text{tg}\varphi) (1 + \text{tg}^2\vartheta)}{1 + \text{tg}^2\vartheta} \right] \Delta + \quad (20) \\ & + \sum_{\text{берма}} \left[\gamma h (\text{tg}\vartheta - \text{tg}\varphi + k_c / (\cos\vartheta \cos\varphi)) + k_k \sigma_T \text{tg}\vartheta (1 + \text{tg}\varphi \text{tg}\vartheta) - (C - \gamma_B h \text{tg}\varphi) (1 + \text{tg}^2\vartheta) \right] \Delta = 0, \end{aligned}$$

где h – высота отсека; Δ – ширина отсека; k_c, k_k – соответственно коэффициенты сейсмичности и концентрации тектонических напряжений в точке поверхности скольжения; σ_T – тектоническое (горизонтальное) напряжение; γ_B, h_B – объемный вес воды и ее превышение над поверхностью скольжения.

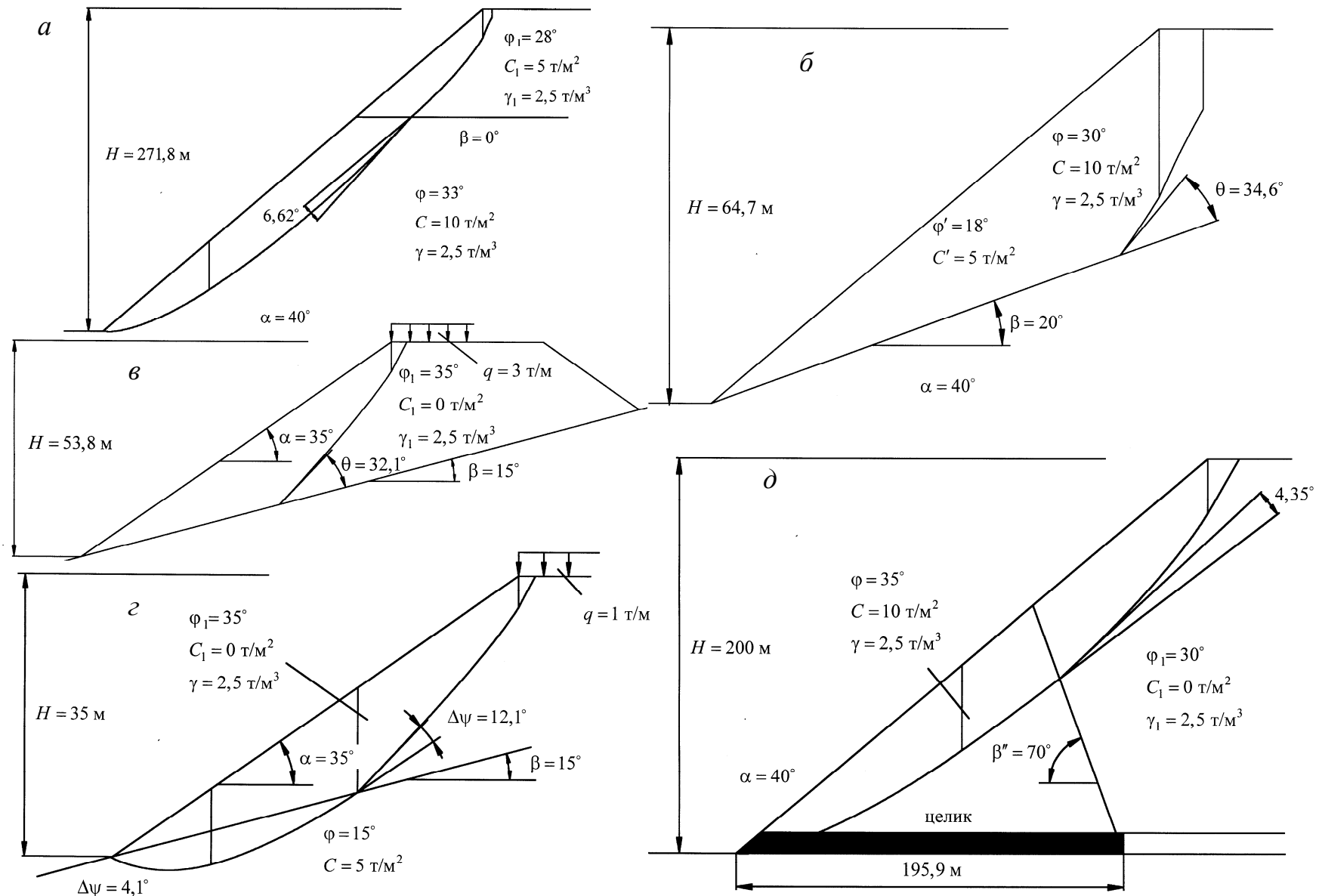


Рис. 7. Примеры расчета откосов в различных горно-геологических условиях:
 неоднородный откос (а); анизотропный откос (б); отвал на наклонном (в) и неустойчивом (г) основаниях; подработанный откос (д)

Для оценки степени влияния тектонических напряжений на устойчивость откосов введем показатель, который можно назвать коэффициентом вклада тектонических напряжений (в точке, то есть для одного отсека). Данный коэффициент численно равен отношению работы тектонических сил к работе гравитационных сил на возможном перемещении всей призмы. Таким образом, с учетом выражения (20), коэффициент вклада определится зависимостью

$$k_T = \frac{k_k \lambda \gamma H \operatorname{tg} \vartheta (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta)}{\gamma h \operatorname{tg} \vartheta} = k_k \lambda (H/h) (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta), \quad (21)$$

где H – глубина точки поверхности скольжения от дневной поверхности (начальной); $\lambda = \sigma_T / \gamma H$.

Средний коэффициент влияния (21) вдоль всей поверхности скольжения будет характеризовать общий вклад тектонических напряжений в устойчивость призмы смещения по отношению к влиянию гравитационного поля.

ВТОРОЕ НАУЧНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим вертикальный однородный откос и определим распределение горизонтальной силы по его боковой поверхности при увеличении его высоты

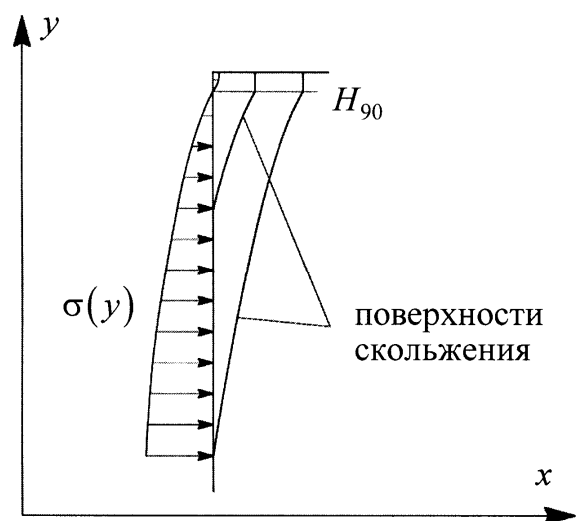


Рис. 8. Схема к расчету подпорной стенки

свыше предельной (расчет нагрузки на подпорную стенку) (рис. 8). Вновь оговоримся, что поверхности скольжения (характеристики), определенные методом предельного напряженного состояния и представляющие собой прямые, наклоненные к горизонту под углом $\pi/4 + \varphi/2$, обеспечивают лишь выполнение условия предельного равновесия. Сам метод предельного напряженного состояния подразумевает отыскание предельных поверхностей, но не самых напряженных (экстремум не отыскивается). Таким образом, для решения данной задачи необходимо располагать геометрией наиболее слабой

поверхности скольжения, которая, впрочем, обоснована выше.

Поверхность скольжения под горизонтальной площадкой описывается уравнением (16). Пусть $y' = p$ – параметр; $H - y = h$ – глубина точки. Тогда тангенс угла наклона поверхности скольжения в точке, согласно (16), равен

$\sqrt{1 + \frac{f \gamma h}{C}}$. Для определения силового воздействия призмы смещения подставим

уравнение (16) с соответствующими заменами в условие равновесия (12), получим выражение:

$$E_0 = \frac{2C^2}{\gamma f^2} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma h}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp. \quad (22)$$

Для определения закона распределения нормальных напряжений по боковой грани вертикального откоса проинтегрируем уравнение (22), возьмем производную по глубине h и заменим $\sigma_1 = \gamma h$:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi \sigma_1}{C}}, \quad (23)$$

где σ_1, σ_3 – максимальное и минимальное значения главных напряжений соответственно.

Заметим, что критерий (23) получен из функционала, подразумевающего полное отсутствие работы внутренних сил (удерживающих упругих реакций) на возможном перемещении призмы смещения, другими словами, при условии отсутствия сопротивления материала при его деформировании. А это означает начало пластических деформаций (предел упругости). В этой связи критерий (23) определяет соотношение между главными напряжениями, соответствующее началу пластической деформации, – начальную поверхность текучести, которая будет являться и предельной поверхностью в случае отсутствия упрочнения материала (идеальная пластичность).

Перейдем к анализу критерия (23). Его можно представить в следующем виде:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \operatorname{tg}\psi, \quad (24)$$

где ψ – угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к направлению действия главного напряжения σ_3 .

Если в уравнении (24) $\sigma_3 = 0$ (одноосное сжатие), то $\psi = \pi/4 + \varphi/2$, а $\sigma_1 = \sigma_{\text{сж}}$ ($\sigma_{\text{сж}}$ – предел прочности на одноосное сжатие). При увеличении σ_3 (сжимающие напряжения считаются положительными) угол наклона критической площадки также увеличивается. В случае если материал идеально пластичный, то есть $\varphi = 0$, угол наклона критической площадки среза является постоянной величиной, не зависящей от уровня напряжений: $\psi = 45^\circ$, а критерий (23) принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2C. \quad (25)$$

Выражение (25) есть не что иное, как известный критерий прочности Треска (Сен-Венана, 1868).

Для идеально сыпучих материалов ($C = 0$) поверхность скольжения является прямолинейной и наклонена к горизонту под углом $\pi/4 + \varphi/2$, поэтому критерий пластичности будет иметь вид:

$$\sigma_1 = (1 + \sin\varphi)\sigma_3. \quad (26)$$

Формула (26) выражает линейную связь между главными напряжениями. Таким образом, как при отсутствии трения, так и сцепления критерий прочности имеет линейный вид. Как известно, идеальная жидкость не обладает внут-

ренним трением (вязкостью) и прочностью на разрыв, а соответственно, и сцеплением. Если положить в уравнении (25) $C = 0$ или в уравнении (26) $\varphi = 0$, получим условие равновесия (прочности) в виде гидростатического закона распределения напряжений: $\sigma_1 = \sigma_3$.

Из выражения (23) также следует, что для высокого уровня напряжений отношение предельных компонент главных напряжений:

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 1.$$

Если подставить критерий (23) в систему уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \psi; \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\psi, \end{aligned} \quad (27)$$

то получим известный критерий Кулона. Но это указывает на то, что в начале пластических деформаций (идеальной пластичности), которую определяет критерий (23), минимальное главное напряжение σ_3 не совершает работу трением на площадке сдвига (27). Физической причиной этому может служить явление дилатансии, то есть увеличение объема в направлении минимального главного напряжения (рис. 9). Однако известно, что при полном контакте

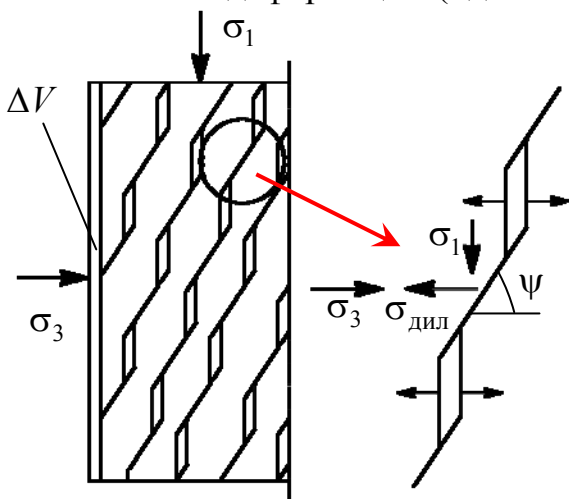


Рис. 9. Схема пластического деформирования образца

при полном контакте

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \psi + \sigma_3 \sin^2 \psi. \quad (28)$$

Таким образом, в процессе пластического деформирования (упрочнения), с учетом (27) и (28), нормальная реакция на площадке среза определится зависимостью:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \psi + k\sigma_3 \sin^2 \psi. \quad (29)$$

где $0 \leq k \leq 1$ – коэффициент, показывающий степень участия напряжения σ_3 в обеспечении равновесия на площадке среза посредством механизма трения (параметр упрочнения).

Таким образом, критерий (23) может быть обобщен на случай развивающейся пластической деформации. Условие равновесия вертикального откоса с учетом изменяющейся работы минимального главного напряжения на площадке среза (упрочнения) примет вид:

$$E_0 = \int_{x_1}^{x_2} \gamma h (p - f) - k\sigma_3 f p^2 - C(1 + p^2) dx, \quad (30)$$

где x_1, x_2 – абсциссы начала и конца поверхности разрушения (скольжения); h – функция глубины заложения поверхности разрушения от горизонтальной поверхности; p – неизвестная производная функции поверхности разрушения.

Функция истинной поверхности разрушения будет доставлять правой части уравнения (30) или функционалу, максимум. Решая данную вариационную задачу аналогично задаче (13), при граничных условиях: $p_0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$,

$h_0 = \frac{2C}{\gamma} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, $k_0 = 0$ получим дифференциальное уравнение, определяющее функцию поверхности разрушения:

$$h = \frac{fk\sigma_3 p^2 - C(1 - p^2)}{\gamma f}. \quad (31)$$

Подставив уравнение (31) в условие равновесия (12), проинтегрируем его и возьмем частную производную по глубине h , а также положим $\sigma_1 = \gamma h$. В итоге получаем следующее уравнение:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi \sigma_1}{C}\right) \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi k \sigma_3}{C}\right)}. \quad (32)$$

Критерий (32) теоретически определяет в координатной плоскости компонент главных напряжений – начальную поверхность текучести или предел упругости (при $k = 0$), текущую поверхность текучести (при $0 < k < 1$) и предельную поверхность (при $k = 1$). Сразу заметим, что предел прочности горной породы может быть достигнут при $k < 1$, а $k = 1$ определяет теоретически предельно возможную поверхность. То же самое можно сказать и про предел упругости. На рис. 10 приведены характеристические поверхности пластического деформирования и направление развития пластической деформации.



Рис. 10. Поверхности пластического деформирования в координатной плоскости компонент главных напряжений

Критерий (32) может быть преобразован также к виду:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C + \operatorname{tg}\varphi \sigma_{\tau_{k\sigma_3, \sigma_1}^{\text{ср. геом.}}} \quad (33)$$

где $\sigma_{\tau_{k\sigma_3, \sigma_1}^{\text{ср. геом.}}}$ – нормальное напряжение, соответствующее на кулоновской прямой среднему геометрическому значению касательных напряжений в точках с абсциссами $k\sigma_3$ и σ_1 .

А если перейти к приведенным напряжениям: $\sigma'_j = \sigma_j + C \operatorname{ctg}\varphi$, то критерий (32) примет следующий простой вид:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{(k\sigma_3)' \cdot \sigma'_1}, \text{ или } \tau_{\max} = \operatorname{tg}\varphi \sigma'_{\text{ср. геом.}} \quad (34)$$

Заметим, что зависимость, подобную (33), в качестве критерия прочности предлагал О. Мор, однако вместо среднего геометрического (пропорционального) нормального напряжения рекомендовалась функция (в первом приближении линейная) от среднего арифметического главных напряжений. Зависимость (34) имеет явное сходство с законом сухого трения Амонтона.

Необходимо отметить, что элементарные акты разрушения в отдельных точках образца происходят на протяжении всего этапа упрочнения (пластического деформирования), но на более низком масштабном (иерархическом) уровне, чем размер области, подвергающейся разрушению (например, образца). То есть линейное условие (критерий) прочности Кулона выполняется при любом коэффициенте упрочнения k . Разница состоит лишь в степени участия минимального главного напряжения в обеспечении равновесия по площадкам среза и углах наклона этих локальных площадок.

Из уравнения (31) следует, что наклон площадки среза к минимальному главному напряжению определяется по формуле:

$$p = \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi \sigma_1}{C}}{1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi k \sigma_3}{C}}} \quad (35)$$

Заметим, что при $k = 0$ выражения (32) и (23) эквивалентны, а при $k = 1$ и $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ критерий (32) примет известный вид:

$$\sigma_1 = 2C \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \sigma_3 = \sigma_{\text{сж}} + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sigma_3.$$

Запишем дифференциальное уравнение, определяющее функцию поверхности текучести (пластического потенциала), на стадии упрочнения:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{\frac{C + \frac{\sigma_1 d\tau}{d\sigma_n}}{C + \frac{k\sigma_3 d\tau}{d\sigma_n}}} = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) теоретически определяет динамику развития пластического деформирования. Решая это уравнение при граничных условиях, соответ-

вующих напряжениям на площадке при одноосном сжатии, и с учетом зависимостей (29), (32) и (35), получим:

$$\tau = C(1 + \sin\varphi) + \frac{1+k}{1-k} C \sin\varphi \ln \left| \frac{(1-k)\sigma_n + 2kC \cos\varphi}{(1+k)C \cos\varphi} \right|. \quad (37)$$

Примечательно, что предельной огибающей функции (37) является известный линейный критерий Кулона:

$$\lim_{k \rightarrow 1} \tau = \left[\frac{0}{0} \right] = C + \operatorname{tg}\varphi \sigma_n.$$

Таким образом, критерий (37) теоретически определяет в координатной плоскости компонент напряжений на площадке среза – начальную поверхность текучести или предел упругости (при $k = 0$), текущую поверхность текучести (при $0 < k < 1$) и предельно возможную поверхность, развертывающуюся в линейную функцию критерия Кулона (при $k \rightarrow 1$). На рис. 11 приведены типовые поверхности пластического деформирования.



Рис. 11. Поверхности пластического деформирования в координатной плоскости компонент напряжений на площадке среза

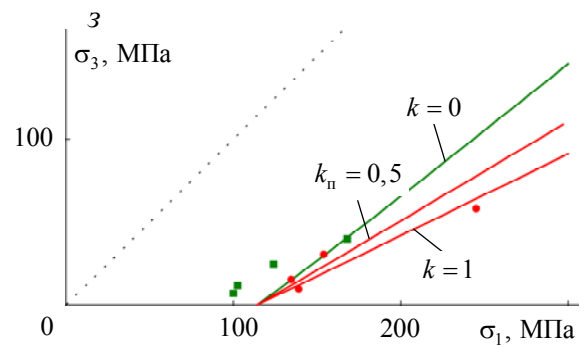
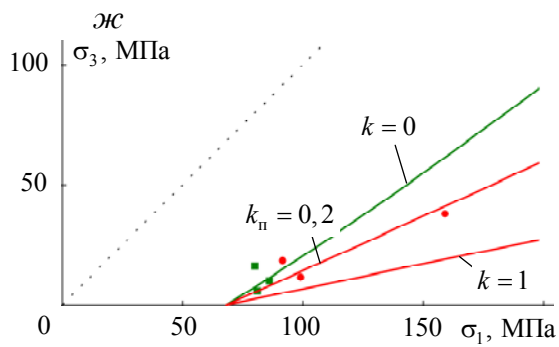
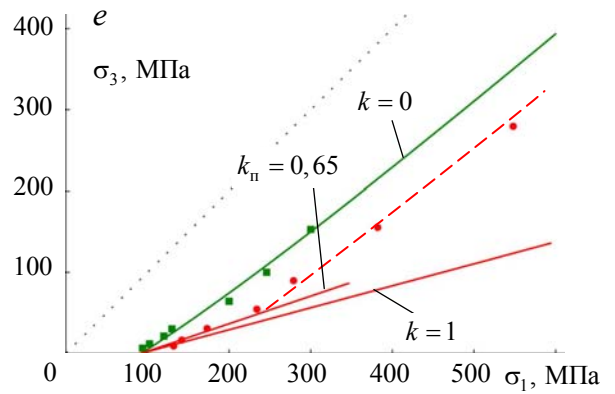
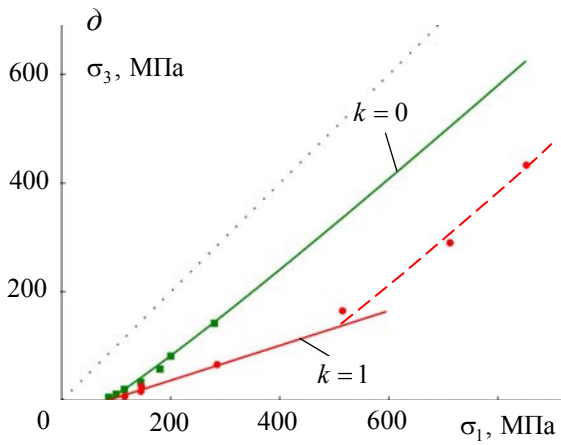
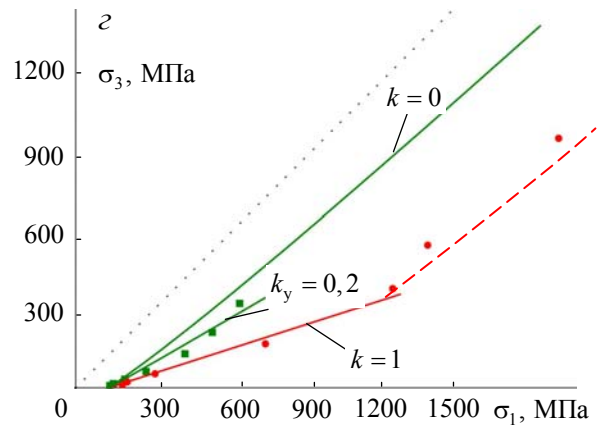
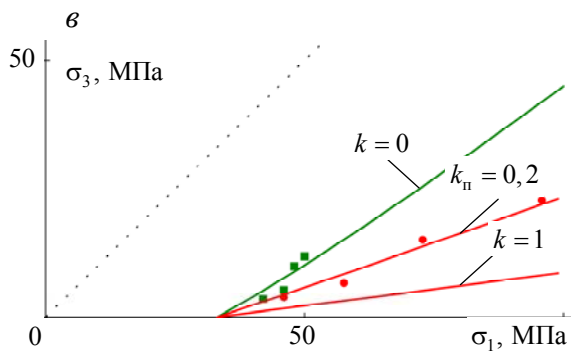
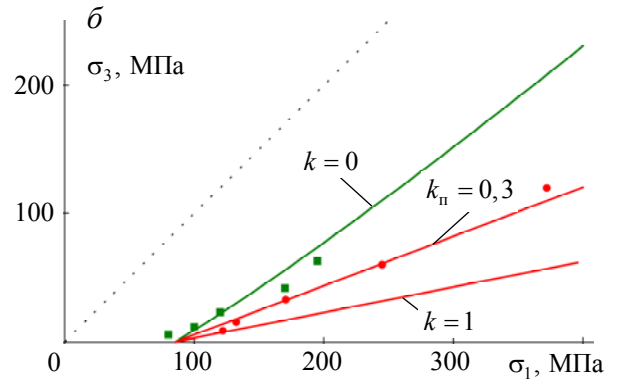
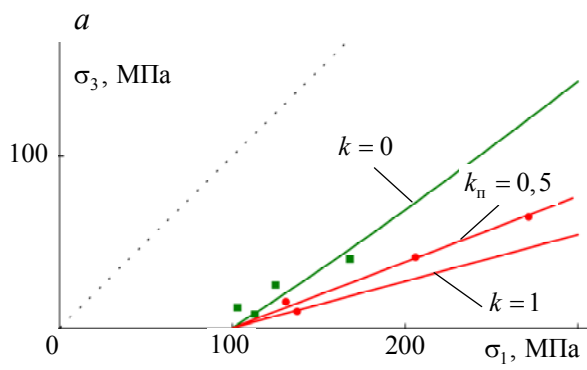
Интересно сравнить аналитический критерий (32) с известными аналогами. Критерий Хука-Брауна:

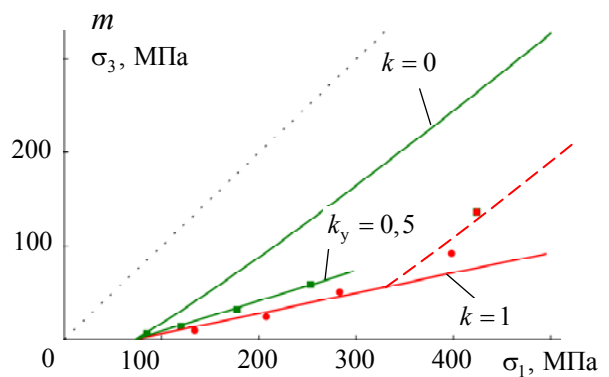
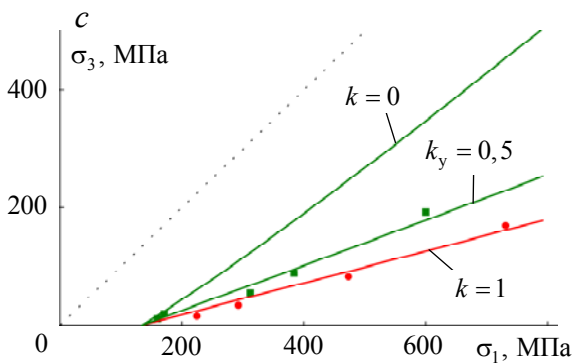
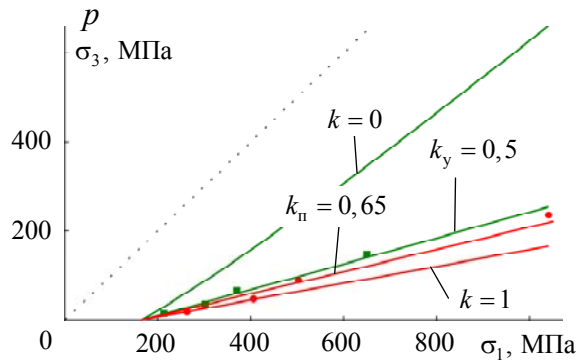
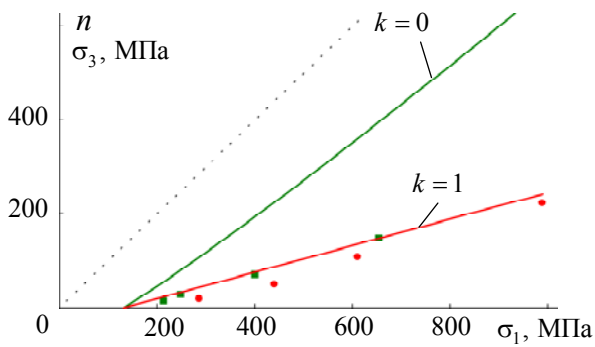
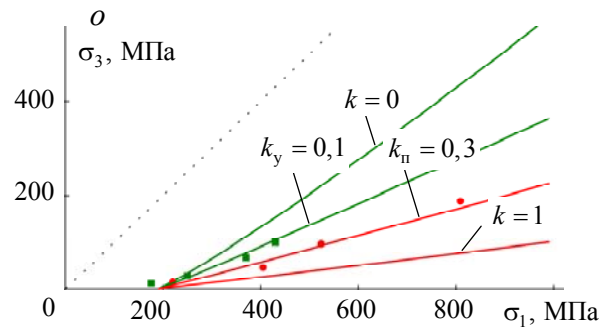
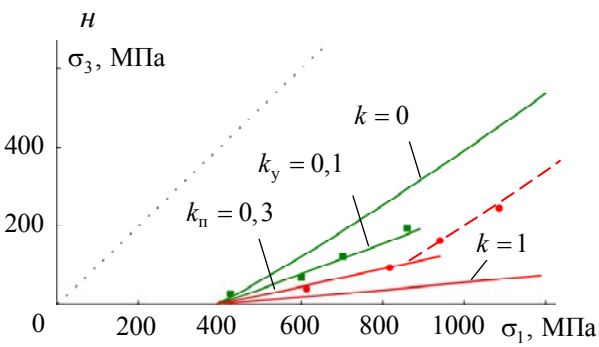
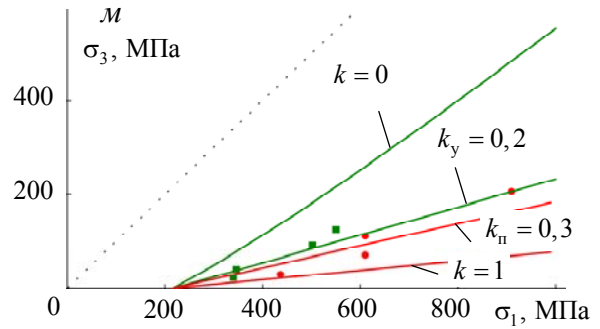
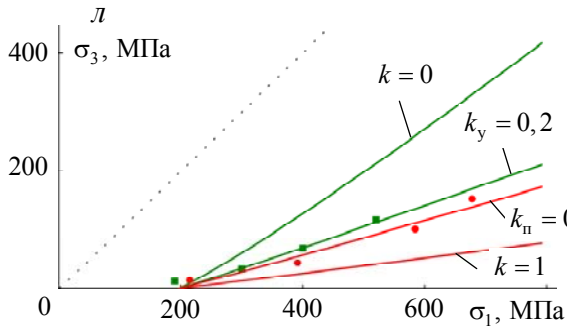
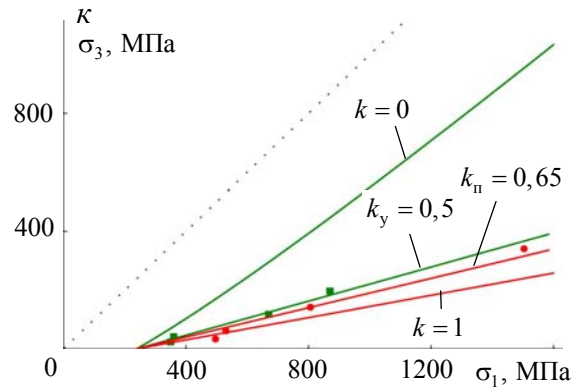
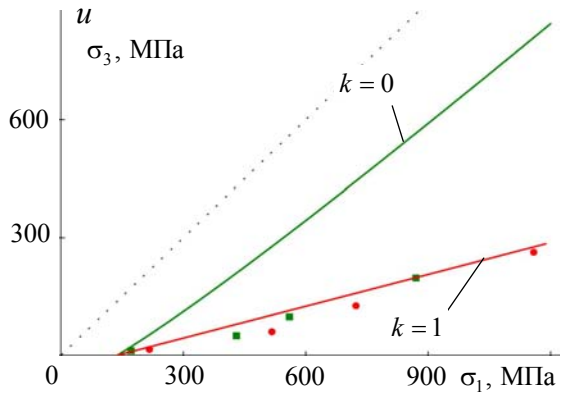
$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \operatorname{tg}\omega \sqrt{1 + \frac{m_1 \sigma_3}{2C \operatorname{tg}\omega}}, \quad (38)$$

где $4 \leq m_1 \leq 33$ – постоянная; $\omega = \pi/4 + \varphi/2$.

Критерий П. П. Баландина можно представить в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \operatorname{tg}\omega \sqrt{\frac{(\sigma_1 + 2\sigma_3)}{2C \operatorname{tg}\omega}}. \quad (39)$$





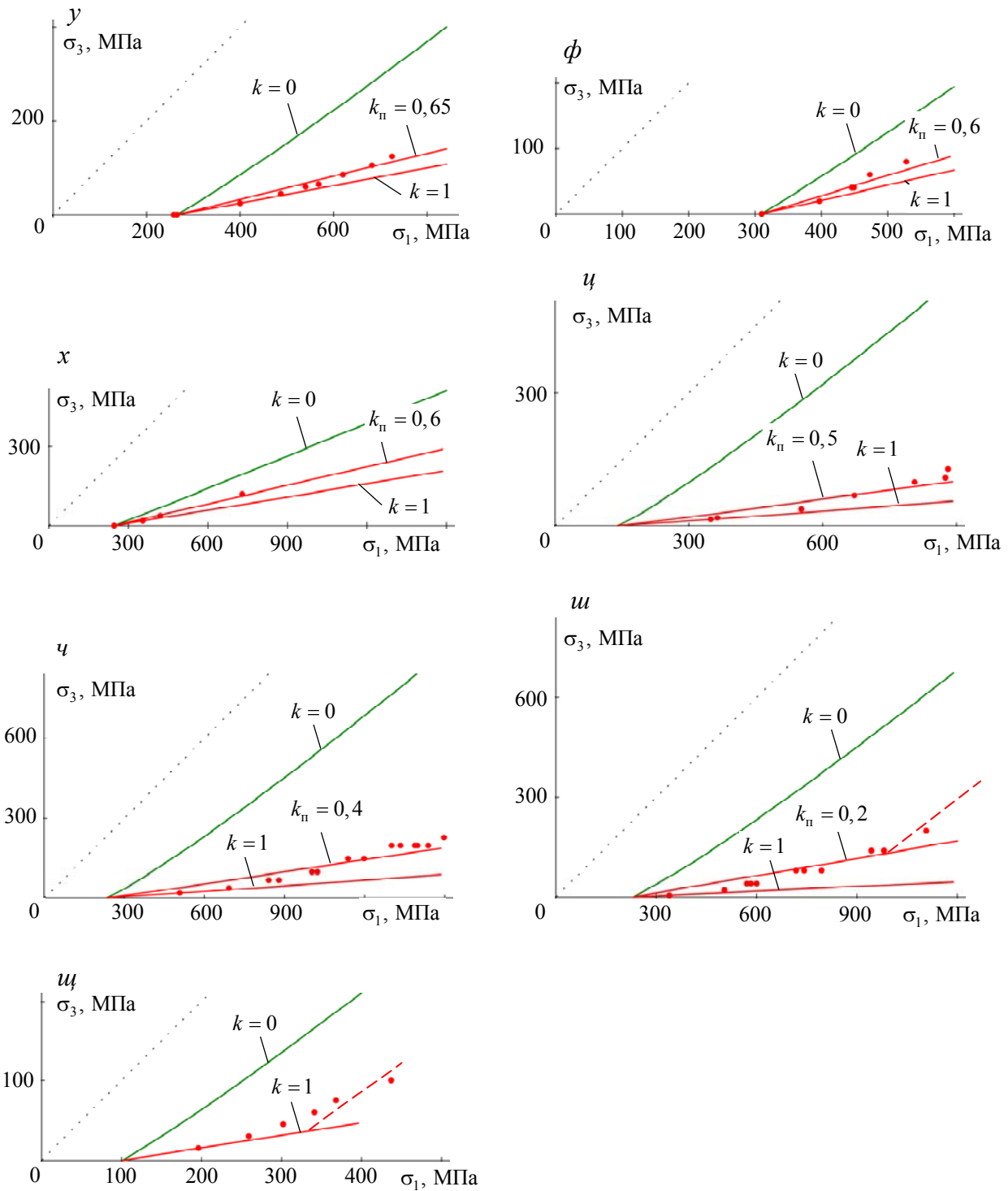


Рис. 12. Теоретические и экспериментальные предельные поверхности и поверхности текучести:

a – бетон; *б* – известняк (Эстонсланец); *в* – каменная соль; *г* – мрамор 1; *д* – мрамор 2; *е* – талькохлорит; *жс* – уголь; *з* – цемент; *и* – фойяит; *к* – кварцевый диорит Д-2; *л* – диабаз 5,7; *м* – диабаз; *н* – диорит 11; *о* – известняк Д-6; *п* – песчаник выбросоопасный; *р* – песчаник, не опасный по выбросам; *с* – песчаник Д-8; *т* – песчаник П-04; *у* – доломит; *φ* – известняк; *х* – мрамор; *ψ* – андезит; *ч* – гранит; *ш* – монацит; *щ* – трахит

Критерий Л. Я. Парчевского – А. Н. Шашенко имеет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2C \operatorname{tg} \omega}}. \quad (40)$$

Несмотря на то, что критерий (38) является эмпирическим, критерии (39), (40) получены при алгебраическом преобразовании энергии формоизменения, а критерий (32) получен аналитически из континуальных соображений, они имеют идентичную структуру. Их обобщающую зависимость можно представить в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \sqrt{f(\sigma_1, \sigma_3)},$$

где $f(\sigma_1, \sigma_3)$ – функция главных напряжений.

Для подтверждения и корректировки теоретических выводов были обобщены результаты экспериментальных исследований (около 700 проб) отечественных и зарубежных специалистов по определению пределов упругости и прочности горных пород, а также искусственных материалов в сложном (объемном) напряженном состоянии. На рис. 12 приведены теоретические графики предела упругости ($k=0$) и предела прочности ($k=1$), пунктиром показан участок идеальной пластичности материала, а точки символизируют экспериментальные данные (квадраты – пределы упругости; круги – пределы прочности; А. Н. Ставрогин, К. Могі). Используя экспериментальные данные, определим значения параметра k на пределах упругости и прочности, а также средние экспериментальные значения коэффициентов дилатансии $\mu_{\text{эксп}}$ (табл. 1). Кроме того, в таблице приводятся расчетные значения коэффициента дилатансии $\mu_{\text{теор}}$ с использованием формулы (23) и ассоциированного закона пластического течения μ .

Таблица 1

Сводные экспериментальные и теоретические характеристики пластичности и прочности горных пород

Наименование горной породы	$\sigma_{\text{сж}}$, МПа	$\mu_{\text{эксп}}$	$\mu_{\text{теор}}$	$\mu = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$	k	
					на пределе упругости	на пределе прочности
1. Бетон	93	–	–	–	0	0,5
2. Известняк (Эстонсланец)	79,2	–	–	–	0	0,3
3. Каменная соль	33	–	–	–	0	0,2
4. Мрамор I	116	1,36	1,40	3,12	0,2	1
5. Мрамор II	76,5	1,20	1,45	3,12	0	1
6. Талькохлорит	94,5	1,37	1,53	3,69	0	0,65
7. Уголь	64	1,19	1,57	4,80	0	0,2
8. Цемент	116	–	–	–	0	0,5
9. Фойяит	130	1,30	1,30	3,69	1	1
10. Кварцевый диорит Д-2	239	1,17	1,47	5,29	0,5	0,65
11. Диабаз 5,7	180	1,56	1,51	5,8(max)	0,2	0,3
12. Диабаз	202	1,70	1,57	5,8(max)	0,2	0,3

Наименование горной породы	$\sigma_{сж}$, МПа	$\mu_{эксп}$	$\mu_{теор}$	$\mu = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$	k	
					на пределе упругости	на пределе прочности
13. Диорит 11	368	1,29	1,61	5,8(max)	0,1	0,3
14. Известняк Д-6	185	1,15	1,63	5,8(max)	0,1	0,3
15. Песчаник выбросоопасный	122	1,85	1,37	3,54	1	1
16. Песчаник неопасный по выбросам (НВО песчаник)	144	1,48	1,52	5,29	0,5	0,65
17. Песчаник Д-8	134	–	–	–	0,5	1
18. Песчаник П-04	75	–	–	–	0,5	1
19. Доломит	265	–	–	–	–	0,65
20. Известняк	310	–	–	–	–	0,6
21. Мрамор	82	–	–	–	–	0,6
22. Андезит	140	–	–	–	–	0,5
23. Гранит	226	–	–	–	–	0,4
24. Монацит	236	–	–	–	–	0,2
25. Трахит	100	–	–	–	–	1

Используя данные таблицы, построим зависимости среднего коэффициента дилатансии от коэффициента трения горных пород (рис. 13). Отмечаем достаточно хорошее соответствие теоретических и экспериментальных данных.

Сопоставление теоретических результатов и результатов экспериментальных исследований показывает:

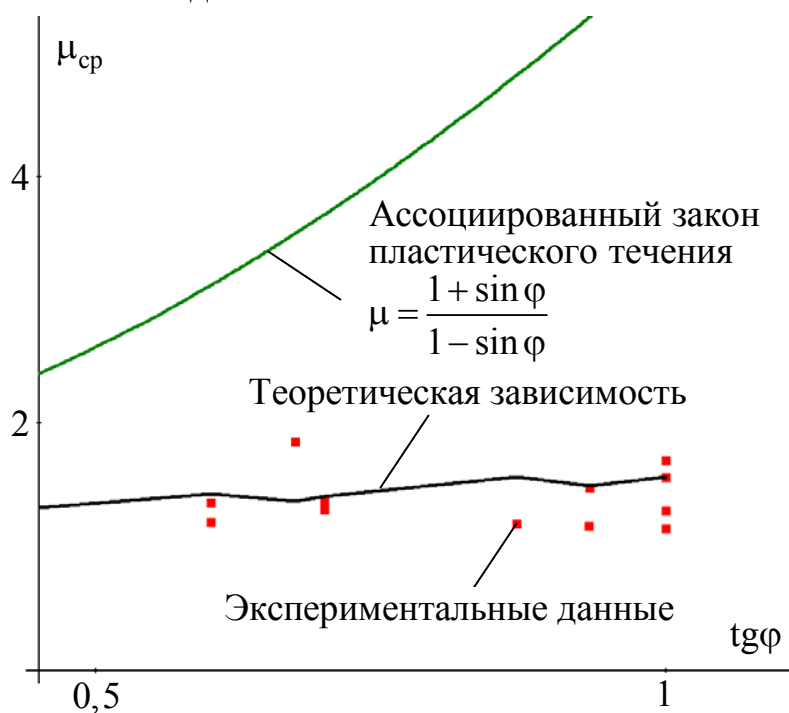


Рис. 13. Зависимость коэффициента дилатансии от коэффициента внутреннего трения

1. Критерий пластичности и прочности (32) и (37) адекватно описывает предельные поверхности и поверхности текучести для различных значений параметра k , то есть независимо от характера разрушения горной породы (пластический или хрупкий).

2. Установлено, что для пород, обладающих выраженным пределом упругости (породы и материалы с пластическим характером разрушения), последний хорошо описывается уравнением (32) при $k = 0$ или уравнением (23).

3. Фактическое значение параметра упрочнения k на пределе прочности для разных пород варьируется в пределах $0,2 \leq k \leq 1$, данное значение определяет степень дезинтеграции при пластическом деформировании и, по-видимому, связано с конкретными особенностями горных пород (структура, форма и размеры зерен и т. д.). Его точное значение для конкретных горных пород целесообразно определять экспериментально.

4. Близость параметров k на пределе упругости и пределе прочности, а также их повышенное значение ($k_y \approx k_{\Pi} \rightarrow 1$) могут служить относительным показателем удароопасности горных пород. Второе условие подразумевает наличие большой емкости для накопления потенциальной энергии деформации, а первое – низкую степень ее рассеяния в процессе упрочнения.

5. Сопоставление экспериментальных и теоретических значений коэффициентов дилатансии показывает, что в качестве функции пластического потенциала необходимо использовать уравнение (23). Использование ассоциированного закона пластического течения приводит к значительному завышению объемных изменений при пластическом деформировании.

6. Теоретически параметр упрочнения k в критерии (32) можно представить следующим образом:

$$k = \frac{\left| d\varepsilon_3^{\Pi} / d\varepsilon_1^{\Pi} \right|}{\left[(1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi) \right]}, \quad (41)$$

где $d\varepsilon_1^{\Pi}, d\varepsilon_3^{\Pi}$ – приращения пластических деформаций по главным осям (скорости деформаций).

Действительно, знаменатель выражения (41) определяет максимально возможный коэффициент дилатансии при пластическом деформировании (ассоциированный закон пластического течения). Примем, что на пределе прочности коэффициент дилатансии приближенно равен $1 + \sin \varphi$, это следует из линеаризации функции пластического потенциала (23), тогда зависимость (41) примет вид:

$$k = 1 - \sin \varphi. \quad (42)$$

Таким образом, с учетом формул (42) и (32) приближенное значение предела прочности горных пород при срезе определится зависимостью:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi \sigma_1}{C} \right) \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi (1 - \sin \varphi) \sigma_3}{C} \right)}. \quad (43)$$

Анализ экспериментальных данных показывает, что для горных пород и искусственных материалов с пластическим характером разрушения ($k_y \approx 0$) формула (43) достаточно хорошо описывает предел прочности, а для хрупких материалов ($k_y \geq 0,2; k_{\Pi} \geq 0,3$) формула (43) определяет предел упругости. Однако заметим, что для хрупких горных пород предел упругости и предел прочности достаточно близки.

ТРЕТЬЕ НАУЧНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Выше решена задача по определению геометрии наиболее слабых поверхностей скольжения в однородных откосах. Используя выражение (13), условие для нахождения данных поверхностей можно свести к следующей вариационной задаче:

$$\int \left[A(x, y, y')(\hat{y} - y) - \mu \eta(x, y, y') \sqrt{1 + y'^2} \right] dx =$$

$$= \int A(x, y, y') dS - \mu \int \eta(x, y, y') dl \rightarrow \max. \quad (44)$$

где $A(x, y, y')$ – некоторая функция координат и производной функции поверхности скольжения (разрушения); $\eta(x, y, y')$ – некоторая функция; μ – постоянная, обеспечивающая условие предельного равновесия вдоль поверхности разрушения, то есть определяющая размеры призмы, необходимые для разрушения откоса; dS – дифференциал площади; dl – дифференциал дуги поверхности скольжения (разрушения).

Заметим, что выражение (44) можно представить как вариационное уравнение:

$$\delta \left[\frac{\int A(x, y, y') dS}{\int \eta(x, y, y') dl} \right] = 0, \text{ или } \frac{\int A(x, y, y') dS}{\int \eta(x, y, y') dl} \rightarrow \max, \quad (45)$$

где δ – вариация функционалов или их функции.

По сути функция $A(x, y, y')$ представляет собой удельную полную (с обратным знаком) потенциальную энергию деформации твердого тела (удельную работу), затрачиваемую на сдвиговое разрушение твердого тела (создание поверхности дезинтеграции, структуры) объемными силами. А функция $\eta(x, y, y')$ является удельной работой сил при сдвиговом разрушении, а по сути – удельной поверхностной энергией (работой) разрушения единицы площади.

Обобщая уравнение (45) на случай действия поверхностных нагрузок, запишем вариационный принцип сдвиговой дезинтеграции в общем виде:

$$\frac{\int_N V(x, y, y') dn + \int_S [W(x, y, y') - U(x, y, y')] dS}{\int_L 2\eta(x, y, y') dl} \rightarrow \max, \quad (46)$$

где $A = W - U$ – удельная работа объемных сдвигающих W и удерживающих U сил на возможном перемещении системы при сдвиговой дезинтеграции (сдвиговый потенциал отсека); V – удельная работа поверхностных сил; 2η – удельная поверхностная энергия разрушения единицы длины трещины при срезе; dn – элемент нагруженной поверхности тела.

Коэффициент “2” в знаменателе (46) формален и показывает, что при разрушении тела (образование трещины) площадь образовавшейся поверхности в

два раза превышает ту же площадь в сплошном теле, однако на наличие экстремума выражения он не влияет. Кроме того, подразумевается, что потенциальной энергии достаточно для образования поверхностей дезинтеграции.

Из принципа (46) следуют достаточно важные выводы. Если внешняя нагрузка постоянна, а объемные силы отсутствуют или ими можно пренебречь, то в однородной среде поверхностями дезинтеграции будут являться плоскости (рис. 14, *а*). Примером являются дезинтеграция образца горной породы под нагрузкой (рис. 14, *б*), массива горных пород под действием тектонических напряжений. Отметим, что данный результат совпадает со статикой сыпучей среды, где первое и второе семейства характеристик, при отсутствии собственного веса, вырождаются в изогональные системы прямых.

Рассмотрим случай, когда A и η постоянны, а внешняя нагрузка отсутствует. В этом случае решением вариационного уравнения (46), при отсутствии дополнительных условий, для объемной задачи является сфера, а в плоском случае – окружность. Данный результат следует из так называемой изопериметрической задачи (задача Дидоны) и закона ее взаимности. То есть при фиксированной длине максимальную площадь оконтуривает окружность и наоборот.

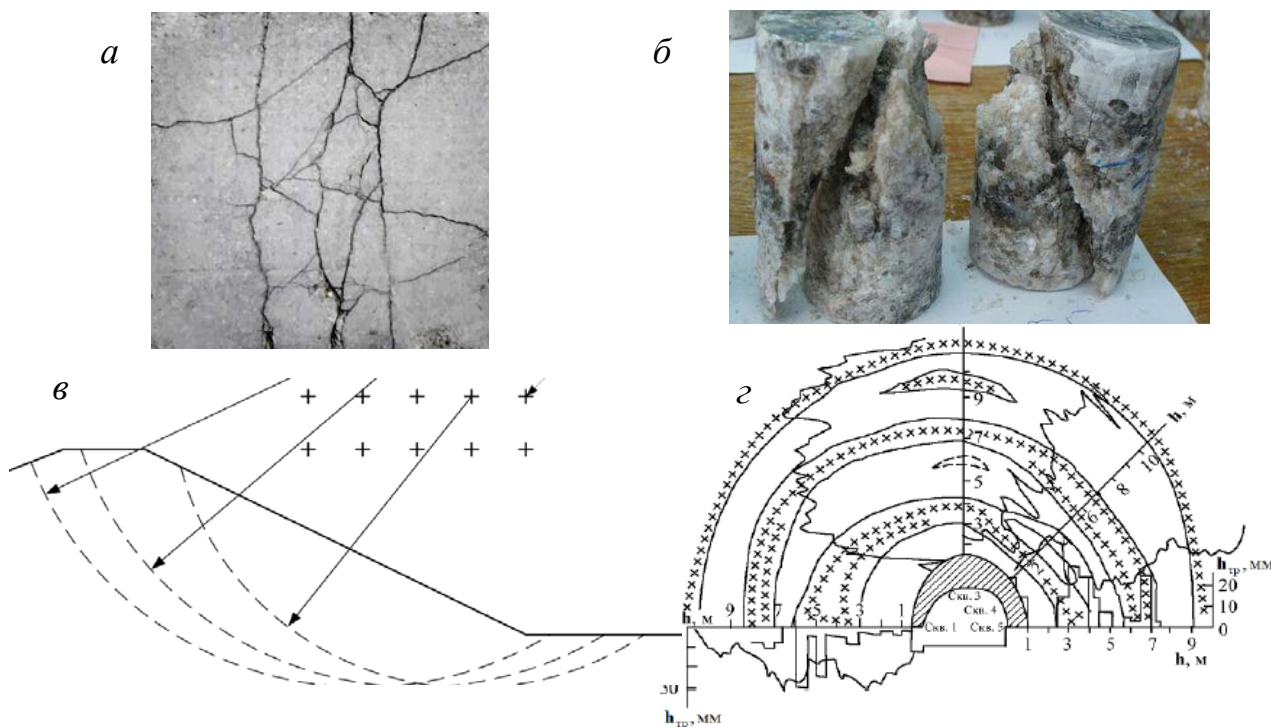


Рис. 14. Примеры дезинтеграции¹:

а – дезинтеграция твердого тела плоскостями; *б* – разрушение образцов горной породы; *в* – круглоцилиндрическая поверхность скольжения; *z* – зональная дезинтеграция

Длительное время при расчете устойчивости откосов используется поверхность скольжения в виде дуги окружности (рис. 14, *в*). В действительности, как показано в диссертации, ее отдельные части очень близки к дугам окружностей.

¹ Приведенные рисунки не являются авторскими.

Однако под откосом поверхность скольжения вогнутая, а под бермой – выпуклая. Известно, что под бермой внутренние силы не совершают работу на перемещении, а под откосом совершают. Но работа внутренних сил на перемещении при дезинтеграции подразумевает сложное (объемное) напряженное состояние, то есть повышенную потенциальную энергию деформации. Таким образом, поверхностью дезинтеграции минимизируются площади (объемы) с пониженным потенциалом (пластические) и увеличиваются площади с повышенным потенциалом (перенапряженные, упругие, энергоемкие области), при этом минимизируется энергия, затрачиваемая на создание поверхностей дезинтеграции (их длина). То есть поверхностями (зонами) дезинтеграции отсекается, по возможности, большее количество потенциальной энергии (сдвигового потенциала или возможной работы при сдвиге), реализуемой для их создания, и, напротив, уменьшаются размеры пластических областей при минимальном расходе (диссипации) энергии на процесс дезинтеграции.

Аналогично происходит формирование кольцеобразных перенапряженных зон вокруг подземных горных выработок – явление зональной дезинтеграции (рис. 14, з), где отдельные сдвиговые трещины своей совокупностью (ломаная линия, включающая сдвиговые и отрывные трещины) в зонах дезинтеграции оконтуривают повышенный потенциал (наблюдается дискование керна), минимизируя длину зон дезинтеграции.

Постоянство A и η означает их независимость от угла наклона сдвиговой площадки во всех точках поверхности дезинтеграции и ее постоянную кривизну. Используя зависимости (16) и (23), можно показать, что радиус кривизны поверхности сдвиговой дезинтеграции пропорционален разности главных напряжений (радиусу круга Мора) и обратно пропорционален объемной силе поля (объемному весу), которая создает данные предельные напряжения:

$$|R| = \frac{[1 + \operatorname{tg}^2 \psi]^{3/2}}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\gamma}, \quad (47)$$

где ψ – угол наклона площадки среза к минимальному главному напряжению, который в первом приближении можно принять равным $\pi/4 + \varphi/2$.

Таким образом, кривизна поверхности дезинтеграции является индикатором вида напряженного состояния и его изменения в теле. Из выражения (47) следует, что постоянная кривизна (радиус) означает постоянную разность главных напряжений или одноосное напряженное состояние в каждой точке. Для идеально связных пород и материалов поверхностью дезинтеграции является плоскость. Из зависимости (47) также следует, что чем прочнее материал, тем кривизна поверхности сдвиговой дезинтеграции меньше.

То есть использование принципа (46) и зависимости (47) обуславливает возможность решения обратных задач: по форме поверхностей сдвиговой дезинтеграции определять исходное напряженное состояние, в случае известного естественного поля напряжений – коэффициенты концентрации напряжений.

Примечательно, что для сыпучих горных пород процесс дезинтеграции будет продиктован экстремумом числителя выражений (45) или (46), который вы-

ражает не что иное, как принцип минимума полной энергии (принцип Лагранжа – принцип минимума для смещений).

ЧЕТВЕРТОЕ НАУЧНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Многочисленными исследованиями доказывается, что существует некоторая фундаментальная константа, в строгом согласии с которой происходит дезинтеграция (дробление) горных пород и других материалов. Считается, что именно закономерность при дезинтеграции является причиной иерархического строения горного массива. Сразу оговоримся, что иерархическое строение массива наблюдается не повсеместно. Ярким примером отсутствия всяческой иерархии является сланцеватость, то есть поверхности дезинтеграции присутствуют, а вложений блоков не наблюдается. Условием для возникновения вложений является дезинтеграция горных массивов под воздействием накопленной и распределенной в нем энергии, то есть без притока дополнительной энергии – замкнутая система.

Таким образом, одним из фундаментальных свойств горного массива является его блочно-иерархическое строение (рис. 15). По-видимому, на это свойство горного массива одним из первых обратил внимание академик М. А. Садовский, 1989, отметив при этом, что отношения размеров соседних уровней иерархии дают приблизительно одно и то же число (иерархическая постоянная дезинтеграции), равное 3,5. Согласно исследованиям по физике твердого тела академика С. Н. Журкова, проф. В. С. Куксенко и др., 1977, концентрационный критерий укрупнения трещин равен $e \approx 3$. Коэффициент линейного вложения блоков, по данным академика М. В. Курлени и чл.-корр. В. Н. Опарина (1992-1994), в рамках геомеханических исследований оценивается значениями 2 – 5. Несмотря на то, что данные величины получены в различных отраслях знаний и при исследовании различных материалов, по современным представлениям, они идентичны. Связывается это с закономерностью дезинтеграции твердых тел. Однако данные значения определены эмпирически и не имеют теоретической основы, а, самое главное, физической интерпретации.

Если предположить, что вся накопленная в некоторой области твердого тела энергия полностью и без дополнительных притоков будет расходоваться на

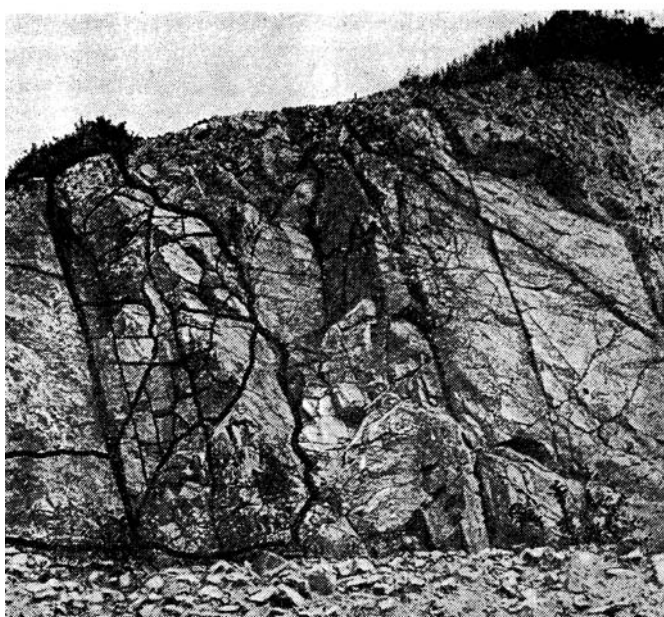


Рис. 15. Блочно-иерархическое строение горного массива²

² Приведенный рисунок не является авторским.

создание новых поверхностей разрушения (свободное разрушение, по Е. И. Шемякину), то, согласно закону сохранения энергии ($2\eta \cdot l = A \cdot S$), отношение $2\eta / A = S / l$ в вариационном принципе (45) будет характеризовать линейный отрезок области, перпендикулярный вновь образованной сдвиговой трещине, достаточный для ее создания. Таким образом, используя зависимости (13) и (45), искомый размер определится зависимостью:

$$L = \frac{2\eta}{A} = \frac{2\rho\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta}}{\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\varphi}, \quad (48)$$

где ϑ – угол наклона площадки среза к минимальному главному напряжению; $\rho \equiv l$ – некоторая постоянная для однородного массива величина, м.

Подставив в уравнение (48) значение $\vartheta = \pi/4 + \varphi/2$, получим:

$$L = 4\rho \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (49)$$

Очевидно, что величина ρ в формуле (49) представляет собой размер образующейся структуры, зависящий от абсолютного значения подводимой упругой энергии. Таким образом, коэффициент вложения блоков (отношение размеров блоков соседних уровней иерархии или параметр иерархии) или критерий зарождения сдвиговых трещин в твердых телах:

$$\lambda = \frac{L}{\rho} = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (50)$$

Учитывая пределы изменения угла внутреннего трения, будем иметь:

$$\lambda = 2,828_{\varphi=0} \div 3,696_{\varphi=\pi/4}. \quad (51)$$

Другими словами, образование трещин будет возможно только тогда, когда отношение расстояний между ними к их длине будет являться некоторой константой, продиктованной законом сохранения энергии. Данный размер межтрещинного участка необходим для накопления в нем достаточной энергии для создания плоскости дезинтеграции заданного размера. Если размер больше, то и трещина будет длиннее, то есть соотношения (50) и (51) будут выполняться, конечно, в случае отсутствия рассеяния и притока энергии.

Для осредненного значения отношений размеров блоков соседних рангов, равного 3,5, по М. А. Садовскому, исходя из уравнения (50) имеем $\varphi \approx 32^\circ$, что достаточно точно соответствует скальному массиву. Таким образом, формула (50) может быть использована для прогнозирования угла внутреннего трения трещиноватого горного массива.

У параметра иерархии (50) появляется вполне явное и логическое толкование. Чем больше угол внутреннего трения, тем больше энергии тратится на создание новых поверхностей (структур) данных размеров, а значит, межтрещинное расстояние также возрастает. Таким образом, физический смысл критерия (50) – показатель диссипации энергии при создании поверхностей дезинтеграции. В средах, где диссипация энергии за счет внутреннего трения отсутствует, то есть $\varphi = 0$, $\lambda = 2\sqrt{2}$, что равно удвоенному значению масштабного фактора дезинтеграции, по В. Н. Опарину.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация является законченной научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований **разработаны теоретические положения**, совокупность которых можно квалифицировать как **новое крупное научное достижение** в области геомеханики и механики разрушения горных пород и твердых тел.

Основные научные и практические результаты работы.

1. Предложена принципиально новая теория устойчивости (разрушения) откосов и оснований сооружений как сплошной среды по методу предельного равновесия, основанная на фундаментальных теоремах и принципах механики, таких как принцип возможных перемещений Лагранжа, принцип наименьшего принуждения Гаусса, теорема наименьшей потерянной работы Остроградского и т. д. Основой математического аппарата предлагаемой теории являются вариационное, дифференциальное и интегральное исчисления. На основе данной теории разработаны методики расчета устойчивости откосов практически для условий любой сложности: однородный откос, неоднородный откос, анизотропный откос, обводненный откос, откос на слабом наклонном контакте, откос на слабом наклонном основании, подработанный и закарстованный откос, нагруженный откос, откос несвязных пород на различных основаниях, устойчивость откосов в поле тектонических и сейсмических напряжений.

2. Аналитически получены функции поверхности текучести и предельной поверхности для горных пород как сплошной среды, обладающей внутренним трением и сцеплением, в сложном напряженном состоянии и сдвиговой деформации. Данные функции определяют такие соотношения компонент напряжений, при которых горные породы переходят в пластическую фазу деформирования (предел упругости), и достигается предел их прочности. Предложена функция пластического потенциала, определяющая соотношения приращений главных деформаций при пластическом деформировании. Произведена корректировка теоретических результатов согласно экспериментальным данным.

Проведенные исследования позволили выявить и доказать новые физические аспекты процесса пластического деформирования (упрочнения) горных пород при сдвиге, в частности:

1) главным признаком пластической деформации на стадии упрочнения является частичная или полная (на пределе упругости) потеря удерживающего эффекта от внутреннего трения на площадках микросдвигов под действием минимального главного напряжения и его постепенное усиление в процессе упрочнения, что является следствием явления дилатансии, то есть увеличения объема в направлении минимального главного напряжения;

2) доказывается изменение углов наклона критических площадок микросдвигов в процессе упрочнения, что трактуется как разворот структурных элементов при пластическом деформировании, наблюдаемый экспериментально.

3. Обоснован вариационный или энергетический принцип условия разрушения (дезинтеграции) горных массивов (твердых тел), позволяющий опреде-

лять геометрию поверхности разрушения тел и рассматривать процесс дезинтеграции твердых тел с общих позиций.

4. Получен критерий зарождения сдвиговых трещин в твердых телах (горных породах) под воздействием потенциальной энергии, дана его физическая интерпретация.

5. Предлагается аналитический метод прогнозирования угловых параметров процесса сдвижения (углы разрыва, сдвижения, граничные) в сплошном квазиоднородном массиве, основанный на определении положения границы областей сдвижения с разрывом сплошности горного массива (собственно сдвижений) и деформаций массива без разрыва сплошности (собственно деформаций). Тем самым достигается возможность постановки граничных условий. Аналитически доказана стабильность углов разрыва для различных глубин в сплошной среде. Указывается на дискретный характер значений углов разрыва и, соответственно, сдвижений и граничных углов.

6. Получены зависимости, определяющие нагрузку на крепь горизонтальных горных выработок в сплошном квазиоднородном массиве горных пород. Обоснован и исследован механизм формирования нагрузки на целики. Исследовано влияние физико-механических свойств горных массивов, угла падения залежи, глубины и степени подработки на величину нагрузки.

7. Рассмотрена проблематика обоснования величины сцепления трещиноватых горных массивов, и на основе аппарата динамического программирования предлагается методика по установлению поверхности разрушения в трещиноватом массиве и, как следствие, определения величины сцепления. Рассмотрен круг вопросов, связанных с обоснованием нормативного значения коэффициента запаса устойчивости (прочности). Доказывается неправомерность введения нормативного запаса в величину коэффициента трения.

Основные положения и результаты работы опубликованы в 46 научных статьях (из них 20 в изданиях из перечня ВАК), двух научных монографиях. Наиболее значимые публикации:

В ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК России:

1. Жабко, А.В. Определение сцепления массива скальных трещиноватых пород [Текст] / А.В. Жабко // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2008. – №8. – С. 57 – 58. (№ 70367 от 24 апреля 2008 г).

2. Жабко, А.В. Вероятностная трактовка величины сцепления трещиноватых горных массивов [Текст] / А. В. Жабко // Маркшейдерия и недропользование. – 2011. – № 5. – С. 37– 39. (№ 80522 от 24 апреля 2008 г).

3. Жабко, А.В. Расчет устойчивости откосов [Текст] / А. В. Жабко // Маркшейдерия и недропользование. – 2012. – № 2. – С. 55–59. (№ 80522 от 24 апреля 2008 г).

4. Жабко, А.В. Предельные параметры плоских однородных откосов [Текст] / А. В. Жабко // Изв. вузов. Горный журнал. – 2012. – № 6. – С. 22–25. (№ 70367 от 24 апреля 2008 г).

5. Жабко, А.В. Учет гидростатического давления при расчете устойчивости откосов [Текст] / А. В. Жабко // Маркшейдерия и недропользование. – 2013. – № 6 (68). – С. 29–31. (№ 80522 от 24 апреля 2008 г).
 6. Жабко, А.В. Расчет устойчивости неоднородных и анизотропных откосов [Текст] / А. В. Жабко // Известия вузов. Горный журнал. – 2014. – № 3. – С. 22 – 29. (№ 70367 от 24 апреля 2008 г).
 7. Жабко, А.В. Способ расчета сдвижений и деформаций земной поверхности и вмещающих пород [Текст] / А. В. Жабко // Изв. вузов. Горный журнал. – 2015. – № 4. – С. 37–44. (№ 893 действует до 30 ноября 2015 г).
 8. Жабко, А.В. Предельное напряженное состояние горных пород [Текст] / А. В. Жабко // Известия вузов. Горный журнал. – 2015. – № 5. – С. 50 – 55. (№ 893 действует до 30 ноября 2015 г).
 9. Жабко, А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Анализ, характеристика и классификация существующих методов расчета устойчивости откосов [Текст] / А.В. Жабко // Известия УГГУ. – 2015. – № 4(40). – С. 45–57. (№ 666).
 10. Жабко, А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Общая теория расчета устойчивости однородных откосов [Текст] / А.В. Жабко // Известия УГГУ. – 2016. – № 1(41). – С. 72–83. (№ 666).
 11. Жабко, А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Расчет анизотропных, неоднородных и подработанных откосов [Текст] / А.В. Жабко // Известия УГГУ. – 2016. – № 2(42). – С. 42–46. (№ 666).
 12. Жабко, А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Устойчивость отвалов [Текст] / А.В. Жабко // Известия УГГУ. – 2016. – № 3(43). – С. 4–6. (№ 666).
 13. Жабко, А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Устойчивость откосов в поле тектонических, сейсмических и гидростатических напряжений [Текст] / А.В. Жабко // Известия УГГУ. – 2016. – № 4(44). – С. 47–50. (№ 666).
 14. Жабко, А.В. Законы пластического деформирования и деструкции твердых тел [Текст] / А.В. Жабко // Известия УГГУ. – 2017. – № 2 (46). – С. 82–87. (№ 666).
 15. Жабко, А.В. Прочность континуума (твердых тел) [Текст] / А. В. Жабко // Известия вузов. Горный журнал. – 2017. – № 4. – С. 47–55. (№ 605 от 01 декабря 2015 г).
 16. Жабко, А.В. Теоретические и экспериментальные аспекты пластического деформирования и разрушения горных пород [Текст] / А.В. Жабко // Известия УГГУ. – 2018. – № 1 (49). – С. 68–79. (№ 666).
- В монографиях:**
17. Туринцев, Ю.И. Методическое руководство по определению максимальных углов погашения бортов меднорудных карьеров [Текст] / Ю.И. Туринцев, П.В. Кольцов, А. В. Жабко. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. – 106 с.
 18. Жабко, А.В. Аналитическая геомеханика: научная монография [Текст] / А. В. Жабко; Уральский государственный горный университет. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 224 с.

В научных сборниках, журналах и материалах конференций:

19. Zhabko, A.V. Calculation theory of stability of foundations and slopes / A.V. Zhabko // Proceedings XV International ISM Congress 2013. 16 – 20 September 2013, Aachen, Germany. S. 85–97.

20. Zhabko, A.V. Calculation of stability of inhomogeneous and anisotropic slopes / A.V. Zhabko, V.A. Gordeev // Mezinárodní konference Geodézie a Důlní měřictví 2015 XXII. konference Společnosti důlních měřičů a geologů. Zasedání odborných komisí ISM. Praha 24. – 26. června 2015.

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная.

Печать на ризографе.

Гарнитура Times New Roman. Печ. л. 2,0. Тираж 150 экз. Заказ №

Отпечатано с оригинал-макета в лаборатории множительной техники

ФГБОУ ВО «УГГУ».

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева 30.

Издательство УГГУ